師大學報：科學教育類
民國 95 年，51（1,2），15-54

高中機率概念的直觀教學

金　鈴
國立臺灣師範大學數學系

王安蘭
臺北市立第一女子高級中學

摘　要

結合行動研究和教學實驗，本文報導 3 班高三學生的原生機率直觀及 1 學年直觀教學的成效。全班教學階段以類推比較、認知衝突和科學性知識，引導學生察覺和驗證自己的原生直觀並以直觀法則引動後設認知，之後加入學生討論活動，再轉為小組晤談教學。結果發現，有些學生能察覺直觀的迷思卻無法抗拒或克服直觀；有些學生於修正直觀迷思之後又折返原迷思，或因不熟悉情境又再度使用原迷思。這些現象表明，直觀不但會影響高中生機率概念的學習，即使經過教學介入，原生直觀似乎很難完全消失也持續影響她們的機率思維。但是，有少數學生能夠察覺與修正原有迷思並轉換成二階直觀或修正直觀。我們認為：教師在教學時若能兼顧直觀與邏輯，並適當運用原生直觀和直觀法則，會有助高中生學習機率概念。

關鍵字：行動研究、直觀、直觀法則、迷思概念、教學實驗

壹、研究背景和動機

在職數學教師和師資培育者的合作研究關係，依據後者涉入的程度，可以大致分為四種：由師培者主導，教師執行；由師培者提供諮詢，教師主導並執行；由師培者與教師共同主導並執行；以及，由教師「實務社群（Community Of Practice, COP）」（Wenger, 1998）共同主導並執行。一般而言，第一種關係的研究是以師培者預設的研究議題（或課程）主導，並評估參與教師的學習或改變成效，例如 Farmer、Gerretson 及 Lassak（2003）和 Olson 及 Barrett（2004）；第二種仍是以師培者預設的議題（或問題）出發，由參與教師發展和執行研究的進程，而師培者則在必要時提供諮詢及評估成果，例如 Steinberg、Empson 及 Carpenter（2004）和 Jaberg、Lubinski 及 Yazujian（2002）；第三種與第二種的關係相近，研究議題（或問題）是由參與教師和師培者共同擬定、發展和執行，同時省思研究的成果，例如 Arbaugh（2003）和 Atweh 及 Heirdsfield（2003）。由於，參與第四種研究關係的教師需具備相當的專業知能、自信與自主，因此，這種「教師 COP 合作研究關係」的研究並不多見，但是，仍有報導數學教師們「如何合作完成評量問題」（Dole, Nisbet, Warren, & Cooper, 1999）與「如何嘗試建立在校專業社群」（Lachance & Confrey, 2003）的研究。也有在研究期間教師與師培者發展出兩種以上的合作研究關係，例如 Smith（2000），由於自己從在職教師到師培者再到合作研究者的角色轉換，而相繼發展出第二、第一和第三種研究關係。而在國內的相關研究中，數學教師與師培者的關係大致屬於前三種，例如陳英娥及林福來（2004）、劉祥通及黃國勳

（2003）、黃凱旻及金鈴（2003）和 Lin（2002）。我們認為，本研究中的數學教師與數學師資培育者應屬於第三到第四種的一種過渡研究關係，亦即，先由教師與師培者共同擬定研究議題，再由個別教師執行研究的進程，並結合教師 COP 中的成員共同設計、發展與面對研究的問題。受限於篇幅，本文只報導一位資深高中數學教師和師培者的共同研究成果。

由於共同作者（簡稱 MT）的在職進修而接觸到許多相關的數學教育理論，又與 COP 的其它三位在職數學教師以及三位職前教師和一位師資培育者（即第一作者，簡稱 MTE）一起研讀文獻、討論教學問題並動手做研究，因而自然地形成一個「教師-師培者的行動實務社群」（簡稱 T-TECOP）。在這個合作研究的 T-TECOP 中，成員們共同討論教學上的問題和研究上的困難，也一起分享、面對和解決教學或研究問題的方法。在教學、實做和互動的過程中，我們一起察覺到更多相關的數學教學問題，也不斷地省思：如何改進教室中的數學教學活動？如何由解決數學教學問題和思考教學活動的過程中，啟發出更多、更有助於數學學習的教學想法與作法？

有一次 MT 在檢討「王先生總共採收酪梨 1080 粒，要打包裝箱上市。已知大箱可裝 25 粒，小箱可裝 8 粒，如果每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元。試問：能將這 1080 粒的酪梨剛好裝完所用的箱子成本最少為多少元？」時（簡稱酪梨題），有位學生甲列出了正確的式子 $\begin{cases} 25x+8y=1080 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$，但是，求出的目標函數 P=60$x$+20$y$ 最小值卻是 x=0，y=135。當時 MT 提問：為什麼是這個答案？她回答「這不是很直觀嗎？因為 P 要最小而 x 的係數大、y 的係數小，所以，當然 x 要越小 y 要越大才有可能發生最小值！而且 25x+8y=1080 中，y 最大為 135，且此時 x 值是 0 為最小。」這位學生的回應，讓我們想到 Fischbein（1987）曾經指出：大多數學生的直觀或直覺（intuition）似乎相當倚賴資訊中的某一部分，並據此一般化且自信地做出整體結論。而學生甲就可能是一個典型的例子，她在評價整個情境時，只考慮了某一部分的相關資訊（亦即，只注意到每個大箱子成本 60 元每個小箱子成本 20 元，而只從目標函數 P=60x+20y 的觀點思考），因而只注意到目標函數中 x 與 y 的係數，卻沒能夠同時留意 x、y 並非獨立變數。亦即，當 25x+8y=1080 中的 y 增加 1 時，x 即相對少 $\frac{8}{25}$，若將這個結果放入目標函數中考慮，即 $60\times(-\frac{8}{25})+20\times1=0.8>0$，這就表示，當 y 增加，目標函數的 P 值應該是伴隨著增加的，所以，在 x 變小、y 變大的過程中並不會發生最小值。她很有自信地一般化部分的資訊，將其直接外推到整體，因而產生迷思概念（misconception）。這樣的實際教學經驗，在接觸有關直觀的理論和研究文獻之後，使我們一起重新思考：數學直觀和高中生概念學習之間的可能關係？

在 T-TECOP 中，我們一起構思如何調整以往高三的複習教學方式，希望以學生自己的問題為主，使她們更清楚自己的數學學習問題。因此，在高三上學期開學時，針對高一的數學內容中最主要的幾個概念，設計了一份第一、二冊概念複習的問卷，想要更進一步瞭解學生的原生概念（naive conception）。由於，學生的原生概念對學習是有很大的影響，在學習之前或學習的過程中所引發的迷思概念會對學生的數學學習產生干擾，甚至有負面的作用（Andersson & Karrqvist, 1983；Shapiro, 1989），因此，MT

在引導學生再次學習某些數學概念之時，更應注意這些既有的迷思概念，幫助她們重新建構已經學習過的數學概念。在 T-TECOP 的討論中，成員們都推測，這些學生的迷思概念與學生的數學直觀有關，尤其是直觀法則（intuition rules）中的 More A-More B 及 Same A-Same B （Tirosh & Stavy, 2001）。這樣的教學與 COP 互動經驗使我們再次思考：數學直觀和高中生概念學習之間的可能關係？

Skemp（陳澤民譯，1995）曾指出一則笑話，提到一位數學教授在演講時，指著黑板上的一個定理說「這真是太顯然了」，看了一下那定理又說「至少對我而言非常顯然」，沉吟了一下又說「對不起，我想一下」，拿起紙筆低頭思考了二十多分鐘，猛然抬頭，滿面興奮的說「各位，確實非常顯然」。之後他評論說，我們的數學老師似乎都是那樣的，數學對他們而言是非常顯然，對學生可就完全不是那麼一回事，而老師又說不出顯然的地方，因此，學生學到的只是一堆沒有理由的規則。事實上，前面數學教授口中的「顯然」都是某種程度的直觀，包括原始（或一階）直觀（primary intuition）和二階直觀（secondary intuition）（Fischbein, 1987）。可見得，數學老師的直觀與學生的直觀可能會有很大的差距。讓我們再回頭想一想前面提到的酪梨題。當時，在 MT 的教學過程中，另一位學生乙曾表示「成本同樣為 60 元時，大箱可裝 25 粒小箱只能裝 24 粒，當然 x 是要較大 y 較小成本才會低，我覺得我的想法也很直觀，可是答案完全不同！」。這兩位同樣持原生數學直觀看法的學生，卻有相當不同的數學表現。這則教學真實事件和 Skemp 所說的故事，使我們更深刻體會到 Fischbein 所說的二階直觀應該就是，如乙同學的直觀和故事中教授思考後的直觀？

數學直觀具有適應性，因此，需要透過系統化的教學才有可能影響一個人的直觀能力；訓練數學直觀應先要訓練相關的認知基模，而且，不只是一序列的反應步驟，它應包含複雜的階序組織（hierarchical organizations），不能只靠對資訊的局部記憶來發展（Fischbein & Grossman, 1997）。笛卡爾也認為，直覺是數學推理不可缺少的元素，就好似打籃球要靠球感一樣，在快速運動中是來不及做邏輯判斷（引自陶可，2004）。這表明了，透過教學應該能夠重新建構認知和信念，進而有助於發展二階直觀。然而，根據 Fischbein、Deri、Nello 及 Marino（1985）的研究，數學上一些直觀的概念並不會因為長期的學習而改變。即使，學習者能適當的運用一些數學術語或符號正確的回答樣板式的問題，可是，一旦面臨不同的數學情境時，直觀的概念就會再次浮現在腦中「如影隨形」地跟著你。由於有些直觀並不完全正確，因此，它也常常是產生迷思概念的主因。那麼，我們很想知道：MT 應該如何進行教學才能有效地幫助學生克服數學直觀的迷思？進而培養她們從原始（或原生）過渡到二階的直觀？

在目前的高中數學範疇中，很少有其他主題如同機率單元一般能普遍且廣泛地運用在日常生活中。機率概念含有直觀的思維，但是，卻經常與我們生活經驗中的直觀期望不符（Sierpinska, 2001）。根據 MT 多年的教學經驗，學生對於機率單元的認識是，一方面沒感受到與數學知識的關連，只要有直觀或生活上的認知就可以了；另一方面，又對求得的答案有種不確定的感覺，因而缺乏信心。我們認為對學生而言，這是一個看似簡單又感到相當困難的學習單元，也可以感受到，學生的腦海中似乎存在著一些對機率的直觀迷思。這又使我們再度思考：數學直觀

與高中階段機率概念學習間的關係？以及 MT 可以如何幫助高中生建立正確有效的機率直觀？進而使她們的機率直觀能夠由原始過渡到二階？

貳、研究的問題和目的

由於我們深刻地體認到，數學直觀對學生學習數學概念（尤其是機率概念）的影響，因此，希望嘗試從直觀的角度「重新看待高三學生的機率思考」，並檢視透過數學直觀引導高三學生「重新建構某些機率概念」的可行性？據此，本研究的問題有：

1.高中生的數學直觀會如何影響其機率概念的學習？
2.數學教師可以如何調整和發展機率概念的直觀教學？
3.直觀教學對高中生再次學習機率概念有何影響？

依據上述問題，本研究的目的是：

1.調查高三學生的原生機率直觀概念及其影響。
2.研擬並實施因應高三學生原生機率概念的直觀教學活動。
3.評估機率直觀教學的成效。

參、文獻探討

一、直觀的意義和特徵

Bruner（邵瑞珍譯，1995）引用韋伯的解釋“直觀就是直接的瞭解或認知”，是指不依靠分析技巧而能理解問題與情境的意義、重要性與結構的行為，他稱這種有別於分析性思考的直觀思考方式為一種直觀的跳躍。Van Hiele（1986）認為，直觀是“以直接觀察為基礎所得的結論”；而且，以視覺結構為基礎的結論必是直觀思考的一部分；直觀不是無意識的，在視覺結構中的見解是充滿意識的；而無推理思考介入的結構延伸（the continuation of a structure）就是直觀的基礎。他認為，視覺結構和推理思考一樣可靠；如果視覺結構不夠強，可加入推理思考來加強視覺結構；而且，由於視覺思考的行動對思考的發展是不可或缺的，假如將結論的分析限制在推理思考，一個好的思維觀點是不會發生的。Torff 及 Sternberg（2001）界定的直觀概念是指：個人沒有透過意識反省或教學而獲得並大量使用知識或知識結構。直觀思考可以快速產生假設，產生嘗試性的知識組織（tentative ordering），同時，可能會使我們覺得這樣的組織是不證自明的。但是，直觀思考的結果是正確或錯誤，仍須靠分析方法來驗證（Torff & Sternberg, 2001）。

Fischbein（1987）指出，直觀不是一個來源，不是一個方法，而是一種認知形式，源自於個人、經驗的一種直接的瞭解或認知；它不同於分析性思考，是一種整體的跳躍性認知。他認為，經驗在形成直觀中扮演相當重要的角色，它會在穩定、自我一致預期的基礎之下成為信念，並且，在特殊情境裡相當自主，它會影響個體的判斷。他認為直觀具不驗自明（self-evidence）、理所當然（intrinsic certainty）、頑固性（perseverance）、強制性（coerciveness）、理論型態（theory status）、外延性（extra-polativeness）、整體性（globality）和隱含性（implicitness）八個特徵。

不驗自明是直觀認知的基本特徵。直觀的認知是自我一致的、能自我解釋的，也是認知的源頭（primitive），例如，我們確信整體大於部分、二點決定一直線，這些陳述都是真實，不需要進一步的分析也不需要其他事實來證明。理所當然是內在對某個數學敘述的自我肯定，例如，學生內在肯定畢氏定理，但是仍然需要邏輯的證明。內在我肯定無法代表客觀知識，只是當接觸某個尚未驗證的數學敘述時，高度肯定感會產生高度的自信。若是錯誤的直觀肯定即可能成為很難去除的直觀迷思。例如，許多高年級學生在無限概念方面的直觀迷思比例不但沒有比低年級的學生少，反而有穩定或增高的趨勢（Fischbein , Tirosh, & Hess, 1979）。直觀會對學習施加一種強制力，個體會不情願地接受已被證明的正確表徵。例如，以地球為宇宙中心的直觀想法阻礙了哥白尼的太陽中心說的發展，即使後來證明地球不是宇宙的中心，我們仍然認為「太陽是從東方升起西方落下」。直觀也是一種理論型態，它會反映具普遍性的一般法則。例如，接受歐幾里德的平行公設並不表示我們能實際的畫出平行的線段，而是意味著，我們能直觀的抓住這個公設的原則，感覺上我們絕對相信兩條線是可以無限延伸的，它們應該不會相交。有時個體會藉由不明顯的資訊外推而得到結論，因此，一個直觀總是超出手中所能用的資訊，這將會產生過度的一般化而造成學習上的困擾。直觀的整體性是指，個體會忽略某些元素或只依賴一些能夠快速產生的明顯元素而得出結論。個體容易只處理一部份的資訊，卻忽略了其他的部分。例如，投擲一枚硬幣連續出現許多次反面時，個體會不自覺的認為，下一次得到正面的機率會大於反面，而沒有察覺隱含在他預測機率背後的直觀迷思。因此，直觀會受隱含因素的影響，不自覺地只注意到資訊的某個部分而做出直觀推理。

Fischbein （1987）依據起源將直觀分成原始和二階直觀。原始直觀是根據個人的生活經驗發展而來，與認知和信念有關，即使在接受學校教育之後，它仍然可能顯現。例如，學童在學習乘、除法的運算時，基於正整數運算的經驗，他們可能會認為：乘法運算的結果會變大、除法運算的結果會變小。此種直觀是藉由學生自己的認知系統外推的結果，這就是一種原始的直觀。二階直觀隱含了一種假設，它並非由個人自然、獨立的經驗所產生，也就是說，它沒有自然的根源。對於同一個問題，二階直觀經常與原始直觀相矛盾，例如，依照原始直觀我們傾向於認為：為了要保持一個移動的物體等速，施予外力是必須的。因此，當一物體被推動以後，它需要一個外力使它保持運動，直到外力消失為止。但是，牛頓運動定律表明，一物體如果沒有外力的介入，它將保持靜止或等速直線運動。學生常常在直觀上很難接受這種觀念，如果，它能從一個學習過的概念轉換成一種信念，則此信念就是二階直觀。

原始直觀是依據普通的日常生活經驗發展而來，是在教育介入之前已具有的認知和信念。因此，我們認為：原始直觀不是充作一種動力，就是形成一種阻礙；而二階直觀並非經由自然的經驗所獲得，而是經由教育的介入學習而來，是被重新構造的認知和信念，常是源自於某一概念領域的理論，是一種科學性的概念；而且，對於相同的概念來說，原始直觀和二階直觀通常是不一致的。所以，直觀包含著許多意涵，也有極端的兩面；它可能是解決問題的靈感，也可能是錯誤的源頭。

二、直觀和學習

直觀不僅會產生穩定的反應，同時，也會組織信念系統而影響學生的判斷和學習。Fischbein 等人（1985）的研究顯示，每一個算術的基本運算通常會與一個隱含的、非知覺的、最初的直觀模式保持聯繫，此直觀模式會限制了數學運算的過程，即使學習者在接受了固定的、正式的算術訓練以後，此模式仍會默默的影響運算的選擇。他們更進一步指出，此直觀模式似乎會無知覺地產生作用，而且不為解題者所控制。Tirosh 及 Stavy（2001）研究數學和科學概念的學習發現，學生在某些類別問題上的直觀反應模式相當類似。許多學生在解決不同內容、不同概念或不同推理的問題上，常常使用類似的方法與認知，這些認知有時是正確的，對於學習有很大的幫助，而有些是不正確的，則對於學習是一大阻礙。於是，他們提出了一個可以解釋和預測學生回答的「直觀法則理論（the Intuitive Rules Theory）」（簡稱 IRT）。這些可引出學生相同答案類型問題的共通之處，不在其科學或數學的內容而在其問題的外在特徵。似乎某種問題的外在特徵活化了某一相關的、特定的 IRT 而決定了學生的選答。

More A-More B 和 Same A-Same B 是兩個與學習機率概念非常相關的 IRT。前者是指，在被比較的兩個物體（或系統）的某一個量 A 有很明顯不同（$A_1>A_2$）的條件下，當被要求去比較兩個物體（或系統）另一量 B 的大小時，許多學生會根據非充分的 A 比較多，就認為 B 就會比較多，而回答 $B_1>B_2$。例如，在「新設立的公司想要成功必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。試比較公司成功的機率與失敗的機率何者較大？」的問題中，學生會因<u>每個過程成功的機率較大</u>（More A），而認為<u>最後公司成功的機率較大</u>（More B），產生錯誤的直觀反應。後者則指，被比較的兩個物體（或系統）的某一個量 A 相等時（A1＝A2），當被要求去比較兩個物體（或系統）另一量 B 的大小時，很多學生常會認為：因為 A1=A2，所以 B1=B2，而做出不適當的反應。例如，比較投擲公正硬幣三次獲得二次正面的機率和投擲硬幣三百次獲得二百次正面的機率時，學生會因有<u>相同的比例</u>（Same A, $\frac{2}{3}=\frac{200}{300}$），而認為有<u>相同的機率</u>（Same B），產生錯誤的直觀反應。Stavy 及 Tirosh（2000）認為，這些 IRT 具有直觀的特性。例如，它很容易讓學生覺得，是不需要做任何證明、不驗自明；使用它時容易充滿自信，而且很頑固，即使教育介入仍然活躍；它具有整體性，學生傾向於將其應用於所有問題，不管是數學或科學問題；它具有強制性，學生的反應似乎是絕對、單一的，其它的選擇將被排除在外，不被接受。

研究顯示，直觀雖然常會與正確的數學或科學概念相違背，但是因為它具有整體思考的特性，通常在解題的最初階段扮演了重要的角色，因此，正確的直觀很可能就是後來順利解題的關鍵。有許多重大的發現都是源自於直觀，例如歐幾里得依據幾何學的五大公設從而建立起歐氏幾何學，哈密頓在散步的路上觸發了構造四元素的火花，阿基米德在浴室裡找到了辨別王冠真假的方法，這些都是直觀思維的成功典範（陶可，2004）。直觀也可以幫助數學抽象概念之學習，Van Hiele（1986）就認為，所有理性的知識（rational knowledge）開始於直觀知識（intuitive knowledge）；若能夠嘗試將這些直觀知識發展成語言符號，相關的理性知識就會出現。而 MT 在教學中也有相似的體會，例如，在檢討 91 年學測考題「某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，

言明以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月（一月、三月、五月…）1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元，比較 A、B 之大小。」時即體驗到，由抽象的數學式

$$A=1000[\sum_{k=1}^{12}(1.005)^{k}],$$

$$B=2000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}],$$

似乎比較難看出 A、B 之大小關係。於是，先簡化上述問題，由直觀的觀點引導學生重新看待這個問題：甲前兩個月所存的 2000 元，只有第一個月存的 1000 元會生兩個月的利息，而乙前兩個月所存的 2000 元，兩個 1000 元都會生兩個月的利息，因此，很容易看出 B>A。再將此直觀轉化成數學式，如下：

$$A=1000[\sum_{k=1}^{12}(1.005)^{k}]$$
$$=1000[1.005+(1.005)^{2}+(1.005)^{3}+(1.005)^{4}+\cdots+(1.005)^{11}+(1.005)^{12}]$$

$$B=2000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]$$
$$=1000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]+1000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]$$
$$=1000[(1.005)^{2}+(1.005)^{2}+(1.005)^{4}+(1.005)^{4}+\cdots+(1.005)^{12}+(1.005)^{12}]$$

學生即可很容易確認這直觀想法是正確的。

所以，IRT 和正確的直觀在學生的學習上均扮演相當重要的角色。我們認為：學生應該抱持適度相信直觀的態度，但是必須是正確的直觀。這就有賴於學生不斷的擴充學習領域，轉化或強化原始的直觀。由於數學概念影響直觀的表現，正確的數學概念引發正確的直觀，若是不正確的數學概念常會引發直觀迷思。因此，在學習數學概念時，若是學生先出現直觀的迷思，對於學習必定是一種阻礙。所以，幫助學生克服直觀迷思建立正確直觀同時重新建構正確的數學概念，都是相當重要的。根據 MT 的教學經驗，發現不求甚解，如 Skemp（1989；引自許國輝譯，1995）所謂慣性學習（habit learning）的學生比較容易受直觀迷思的影響。

Skemp （許國輝譯，1995）認為，慣性學習是透過刺激與反應的聯結形成習慣，學習是發生在動作之後，較少認知的成分、適應性也低；而智性學習（intelligent learning）是目標導向的，學習是發生在動作之前，動作不只為達成目標也可以用來測試假設，有高度的適應性。他稱目標導向過程為指導系統（director system），智性學習需要兩套指導系統。第一指導系統（delta1）接收現在情境中的資訊並與目標情境比較，利用既存的各種基模（schema）制定一套行動計畫；第二指導系統（delta2）的作用對象是 delta1，它為 delta1 建立大量的基模以便執行許多不同的工作，再由這些大量的基模中選取特定的計畫，將現在情境轉到目標情境中。平行於慣性-智性學習，Skemp 將理解分為機械式（instrumental）和關聯式（relational）。前者能夠將硬背的公式應用於特定的問題，但是卻不知其背後的原理；學生只是操作一些數學符號，只要透過 delta1 接收、反應就完成學習了；它幾乎沒有適應力，碰到新的問題就會受到限制。後者是要建立整體的概念結構和關連；新的概念透過學習同化到適當的基模，而有一番重組、凝聚、增長、強化；於面對不同問題時，可以推論出適當的解決方法活化 delta2。所以，delta1 著重在物質的察覺，是直觀的過程，delta2 著重在心智的察覺，是反思的過程；而慣性學習者通常是

機械式理解，學習通常只靠 delta1，即使想用反思式的心智活動也可能找不到適當的基模。我們猜想：這就是慣性學習者容易產生直觀迷思的主因。智性學習中，認知地圖會引領學生進入探索區域拓展新知以理解新事物，因此，也較有能力驗證直觀的想法是否正確；慣性學習中，沒有什麼探索區域，在面對任何不符合舊規則的新問題時，學生只能等待老師的援手或憑直覺解題。因此，我們預設：MT 應該將學生導向智性學習，讓她們發展關聯式的理解並活化 delta2。如此，或可使學生在重新學習機率概念之時，能具備較佳的基礎來面對 IRT。

三、直觀教學

（一）克服 IRT 的教學策略

Tirosh 及 Stavy（2001）指出，可以運用 IRT 的預測力來幫助學生克服 IRT 的副作用。要達成此目標，「類比」和「衝突介入」應該是比較有效的教學策略。類比教學是將一系列的數學問題重組，以定錨（anchoring）問題開始，經過搭橋（bridging）問題，再到標的（target）問題；定錨問題不會令學生聯想到 IRT，通常會引出正確答案，搭橋問題則會引出 IRT，標的問題即強烈地暗示 IRT。衝突教學則用一個問題來引出學生的錯誤答案，接著，呈現一個和學生錯誤答案衝突的情境，讓學生察覺到自己答案的不適當。而引發矛盾的方式有：呈現矛盾的具體證據；呈現與原先問題在本質上相似的問題，並引出正確答案；或是呈現正式且相關的知識。

Fischbein（1987）認為，教師在介紹一個新概念時，通常會使用直觀的模式，這有助於概念的獲得。然而，有些原始直觀容易依附於某些概念，因此，必須儘早為後續理解一般抽象意義和定義作準備，釐清不同概念及操作間的關係、建立共同結構，以避免直觀的解釋成為難以改變的迷思。例如，學生在開始學習乘法時，若要避免學生有"愈乘愈大"的迷思，則應讓學生了解更多乘法結構的一般意義。學生必須學習去分析和形式化他的原始直觀，也就是，要學習如何從實物的練習和直觀的解釋中，抽象出數學結構並學習如何描述它們的深層意義。例如，我們能夠直觀地辨認圓形、正方形和三角形，但是，仍要試著精確完整地描述其共同、一般的特質，這樣的練習能有助於控制原始直觀。Van Hiele（1986）也認為，假如能呈現對直觀的洞察，應有助於學習抽象的數學概念；直觀始於一個結構的呈現，因此，將結構訴諸於學生是必要的。所以，教學最好從例子開始，先討論例子中的現象，然後指出它的結構再下定義。

Polya（李心煽、王日爽、李志堯譯，1992）認為，數學家的創造性工作成果是論證推理，而這是通過合理猜想而發現的。例如，今天人們所知道的數的性質幾乎都是由觀察所發現的，並且，早在用嚴格論證確認其真實性之前就被發現了。甚至到現在，還有許多關於數的性質是我們所熟悉而不能證明的，只有觀察才能使我們知道這些性質。我們認為，這樣的觀察發現即是 Fischbein（1987）所謂的預期直觀（anticipatory intuition）。他認為，要發展直觀必須考慮預期的直觀，雖然，數學是一推導演繹的知識系統，但是在建構數學知識的過程中，類比和合理猜想應是基礎。所以，教師應鼓勵學生做合理的猜測，並學習接受每個人都有可能猜錯的危險；進行有系統的討論讓學生感受相似性，以培養確認同態（isomorphism）和描述共同結構的能力；讓學生直觀且形式地分析他自己預期的解題能力。

我們認為：直觀的思維與抽象邏輯的思

維是不可分離的，教學時應直觀與邏輯並重。在培養邏輯思維能力的同時，也應該注重觀察力、想像力和直觀能力的培養。為了避免因過度強調形式邏輯的證明而使學生對他們的直觀感覺失去信心，也應發展學生“確信（conviction）”的感覺（Fischbein, 1987）。讓學生知道，每個人也都具有正確、有用的直觀，可以藉由同化（assimilating）適當的形式結構來控制與面對自己的直觀。所以，MT 似乎應該試著：透過大量的例子及類比讓學生獲得足夠豐富的經驗，並鼓勵合理的猜想；同時，讓學生批判和檢驗自己的想法，幫助發展學生正確的直觀；以及，經由直觀思維抽象化到邏輯思考的訓練。

（二）機率與直觀教學

在機率問題中，直觀的角色似乎比在其他部分的數學學習更為重要。Borovcnik 及 Bentz（1991）認為，機率直觀常常與數學運算相違背，就像算出要贏得樂透的機率是那麼小，但是在現實生活中，卻每個星期都有人中樂透。Fischbein（1999b）認為，學生的困難與迷思不只是邏輯的不足，常常是直觀的傾向、解釋和模式與學校給予的形式知識相衝突，而這些也是造成機率概念學習困難的原因。Borovcnik 及 Peard（1996）也認為，機率含有直觀的思維卻充滿了迷思概念，所以，直觀思考需要再結構，需藉由數學的洞察使其敏銳；機率教學必須克服不適當的直觀概念，連結原始直觀與數學模式，不斷地修正直觀與數學間的交互作用，以幫助學生了解抽象的數學理論。Shaughnessy（1992）強調，機率教學應將一些觀點模式化，在不同情形下所應用的機率模型應該由學生要解決的問題與該問題的類型而定；教師要能讓學生在一種數學化的機率模型下工作，提出機率的另一些解釋，來代替原始的主觀解釋。他將機率概念分為非統計的（non-statistical）、天真統計的（naive-statistical）、自然統計的（emergent-statistical）和實用統計的（pragmatic-statistical） 四種形式；它們之間不一定是線性的，也非互不相容的，一個人可能在不同的情境下有不同類型的隨機概念表現。為了讓學生同時面對頑固的思考及天真的統計直覺，教師應該使他們察覺原有概念的不協調，用數學模型取代原生概念。

相關的研究（Fischbein, 1991；Fischbein, Barbat, & Minzat, 1971；Fischbein et al., 1985；Fischbein & Schnarch, 1997）均指出，教學能促進機率思考的發展，而直觀、邏輯思考、教學的交互作用是機率思考發展的中心。Greer（2001）整理 Fishbein 等人對於直觀教學的建議後指出：（1）建立二階直觀要先有機率現象的反思活動經驗，亦即，學生需要大量動態隨機現象的具體經驗和熟悉科學性概念的模式，例如，預測、實驗和證實；（2）需要預示結構（pre-figuration of structures），以表徵當媒介來獲得抽象的結構，特別是“生成模式（generative model）”的概念，例如畫樹狀圖即能加速學生認識組合的概念和運算；（3）決定論的思考（deterministic of thinking）、因果關係的解釋會不利於操作基模的發展，而間接影響概念的同化；（4）原始直觀永遠遍在、不可能消失，即使歷經教學介入而被覆蓋，它們仍會潛在地影響學生的判斷，因此，教師與學生都必須學習與直觀共存、分析並形式化自己的原始或原生直觀。另外，發展非直觀（non-intuitive）的直觀在機率統計中是特別重要，因為，機率統計中的許多現象會與我們的初始認知和信念相牴觸（Fischbein, 1987）。

由以上討論可知，機率的學習與直觀有

密切的關係，機率的直觀思維需藉由數學的洞察使其更為敏銳，而機率教學又不能只依賴數學訓練，必須建立直觀的洞察。因此，我們努力的目標是：如何建立高中生正確的機率直觀或修正她們的原始直觀而能成為二階直觀？

四、機率概念的試探性直觀教學架構

認知心理學家認為學習者應扮演主動學習的角色，而且，學習是本身既有的知識結構與生活經驗相互平衡的過程（Driver & Oldham, 1986）。承接認知心理學家的想法，建構論的學習觀點主張學生透過舊的經驗連結新的訊息，以建構對自己有意義的概念（Garnett, Garnett, & Hackling, 1995）。知識不僅是由教師透過教學傳授給學生，學生更是主動的學習者，她們會依據自己的經驗與周遭環境交互作用建構出對世界的認識及解釋。學生的認知在學習新概念之前並非是空白的，而是充滿了自發性的概念（spontaneous concepts），然而礙於有限的經驗和局部的推論，這些自發性概念經常與科學家提出的科學性概念（scientific concepts）有出入（Vygotsky, 1961；引自李維譯，2000），而且很難經教學而改變，因此往往阻礙了學習（Hashweh, 1986）。所以，科學性概念有明確的定義，可藉由一套技術性的教育方式來教導學生學習，而自發性概念是不經由特定的教育就能自然獲得的概念。在 Vygotsky 看來，此二者是循著相反方向行進的，自發性概念從概念的低級屬性向高級屬性「自下而上」地發展，科學性概念則從概念的高級屬性向低級屬性「自上而下」地發展；但是，相反的發展途徑並不會消除兩種概念形式的相互聯繫和相互作用。他將發展與教學的相互關係視為科學與自發性概念之間的密切聯繫，透過兩者的充分互動，個體會慢慢地發展而產生真概念。當兒童發展到科學性概念階段時，就能真正理解和內化符號、字義以及心理工具，並自主地運用心理工具來協助思考，而不會一味地以自發的概念來思考。

一般學習理論均強調成熟是學習的必要條件，Vygotsky 卻主張學習可促動發展的歷程，這就是近側發展區（Zone of Proximal Development，簡稱 ZPD）的觀點。Vygotsky 認為，兒童心智發展可已區分為兩個層次，亦即實際發展層次（real level of development）和潛在發展層次（potential level development）。前者指兒童能夠獨立解決問題的能力，後者則是兒童在成人（例如教師）的引導或與能力較佳的同儕合作之下而能解決問題的能力。ZPD 即為個體實際發展與潛在發展之間的差距，是指個體獨立解題和在輔助或互助下解題之間的距離，也是透過模仿互動所能企及的問題解決層次（Gredler, 1991；引自吳幸宜譯，1994）。因此，ZPD 是在成人與兒童互動中創造出來的，教師的任務即是展現對兒童的敏感度以及建構使兒童能夠發揮或發展潛能的作業（Gredler, 1991）。

鷹架（scaffolding）的概念源自於 ZPD 的精神，在學習者的 ZPD 中，它是教師根據學習者原有背景知識所安排的暫時性學習架構，用來協助學生由實際的發展層次進入潛在發展的層次，此種導引就是一種鷹架。它描述教師在協助學習者解決超越其個人能力的問題時所扮演的角色，也是一種控制超越學習者能力之作業要素的歷程（Gredler, 1991）。Greenfield（1984；引自陳祐凱，2002）的鷹架理論教學原則強調，在實際教學活動中，教師必須以學習者原有的自發性概念為基礎，依據教材內容以及學習者特性，提供學習過程中所需的鷹架，並且該鷹架的支持程度會隨著學習者的實際學習情況不斷地調整與修正。它提供一種學習的支援、一種工

具，它拓展工作者的範疇、使不可能成為可能以及在必要之時選擇性地運用它（Gredler, 1991）。此鷹架是以導向學習者內化為目標，使學習者能藉以培養自身獨立自主學習的能力。同時，在教學活動的設計上提供適當的學習情境，讓處於 ZPD 的學習者能主動積極地學習。再透過學習社群之間的互動進行對話、溝通與協商，再經由自我反思的過程對學習過程及內容產生認同和意義。因此，教師若能適當運用鷹架理論，了解學生的 ZPD 而設計教學活動，應有助於學生的概念改變並促進學生的自我反思。

為了重構高三學生的機率概念，我們提出：重新學習機率概念的兩個核心要素是直觀與反思（或稱為省思）。所以，本「試探性機率概念的直觀教學（簡稱直觀教學）」的核心構念是：運用 Vygotsky （李維譯，2000）的 ZPD 理論瞭解和掌握學生的自發性概念，以搭設教學的鷹架；運用類比、認知衝突和小組合作學習策略於課堂的教學活動；以及，主動運用 IRT 來引動學生的後設認知和反省性思考。以下說明這些構念的實施內涵。

（一）引出學生機率概念的既有想法，面對學生的原生數學直觀

Hashweh （1986）的研究指出，學生的大部份先前概念是與經驗世界互動的結果。由於之前一連串重覆地有效使用，這些先前概念便很快地被用來詮釋現象、形成解釋，致使其如直觀信念一般的不證自明，固執而難以改變。而機率概念與日常生活息息相關，學生的表現更是如此。因此，教師都必須了解概念的本質以及學生的先前概念，才能設計適切的教學活動與內容，以促進有意義的學習。所以，我們即在 MT 教學之前實施前測，一方面是想掌握學生的原生直觀，另一方面也讓學生預先察覺自己的問題，如此，學生才會有更強的動機去改變已習得的數學概念而願意接受新概念。

（二）運用類比、認知衝突和小組合作學習策略，澄清學生的機率科學概念

為了改變學生的原始概念，我們運用認知衝突讓學生瞭解其先前概念的侷限、對本身概念感到不滿足，以促使其改變；藉由類比的方式幫助學生理解概念的內容；透過合作學習協助個別概念的改變並學習與他人互動而能對自己的經驗感到不滿意，進而發展出較具說服力的新概念，並看到新知識在不同情境下的有效性（Chinn & Brewer, 1998；Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982）。MT 在試驗教學中，也會利用前測問卷來開展教學的內容，配合這些概念改變教學策略的運用，為學生搭設學習的鷹架，以期能幫助學生再次澄清自己的原生機率觀念。

（三）引入 IRT，培養學生的批判性思考習慣

依據 IRT 的研究，學生的回答通常是根據題目外部不相干的特徵，這更顯示出激發學生批判性思考的重要性。因此，教師應該提醒學生注意題目的外在特徵之外，更應批判性地檢驗自己的答案；在激發學生以批判的角度去檢驗答案之時，需要避免因而阻礙了他們普遍化和外推的思考機制（張世昌，2002）。我們認為，在 MT 教學之中主動地引入 IRT，由經驗 IRT 產生錯誤的例子，讓學生觀察這些數學直觀迷思的共同結構，應該會有助於重新建立學生「直觀看似正確，但仍須檢驗」的直觀信念，鼓勵學生由多種觀點來解決問題。

（四）引動後設認知和反省性思考，培養學生自我覺知和自我監控的能力

後設認知是學習者對認知過程進行反省性思考之心智活動，並根據之前的學習重新調整和安排有關的學習活動。它可以監控、調節、及指揮學習者本身所具有的知識或認知策略，以應付某種特定的認知活動。例如，持續專注目標、找出錯誤與障礙、知道如何改正錯誤與克服障礙（Beyer, 1987），或在學習過程中監控和更改方向以達成目標（Paris & Lindauer, 1982）。所以，後設認知對學習者的認知發展扮演著重要的角色。由於直觀的立即性及強制性，容易讓人只看到問題的某一部分而忽略了某些資訊而做出錯誤的判斷。所以，我們希望學生在回答問題之前，能多停下來想一想（反思）、能重新檢視自己的解題歷程（監控、評鑑、調節）、能察覺到自己解題上可能出現的疏漏或不合理之處，進而採取修正的措施（後設認知的察覺）。反省性思考及有意識的後設認知應能使學生更深刻地體會到自己的思考歷程，而逐漸地為自己的學習負責。

綜上所述，我們透過前測了解高三生機率概念的 ZPD，再運用上述策略搭設教學的鷹架協助她們將自發性的概念（原生直觀）發展成為科學性的概念（二階直觀），同時輔以 Skemp（許國輝譯，1995）的智性指導系統。類比、認知衝突和小組合作策略對學生的影響是直接的，這是教學的 delta1；引用直觀法則、引動後設認知和培養批判性思考對學生的影響是反思的，這是教學的 delta2。這樣的直觀教學構思如圖 1。

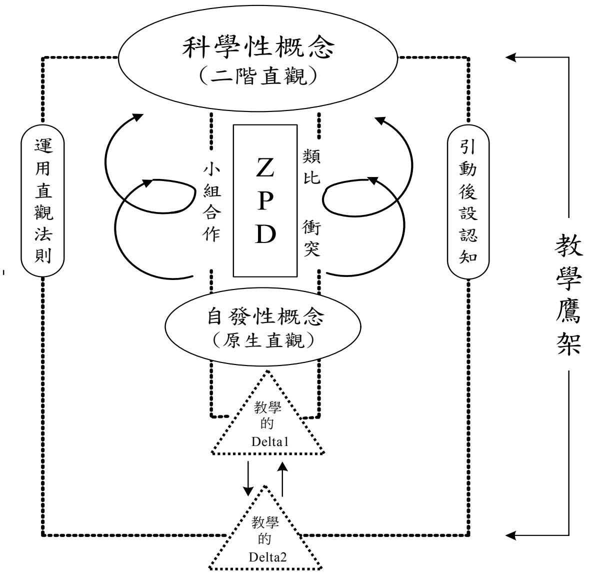

圖 1　機率概念的試探性直觀教學構思示意圖

資料來源：作者自製

肆、研究方法

一、研究的設計和實施

社會科學的研究可以大致區分為質性和量化取向。其中，質性研究方法包括個案研究法、實驗法、調查研究、檔案紀錄分析和歷史研究法。一般而言，它具有自然方式、描述性資料、關注過程、歸納式探索以及脈絡意義五個特質（Bogdan & Biklen, 1998；引自黃光雄主譯，2003）。自然式（naturalistic）一詞來自生態學，指的是研究者應盡可能走入研究場域，關心其背景脈絡，若一離開研究場域則變成毫無意義；質性研究是以實際場域作為直接資料的來源，研究者本身的洞察即是關鍵，資料描述是文字的，可以從札記或影片的書面資料取得，並且，假定每一個事物都可能發展成線索；質性研究不僅注意結果，同時也要關注歷程的進展；質性研究者以歸納的方式來分析資料，將資料集合起來形成重點，最後朝向一個具體的方向；最後，質性研究的目標是對人們如何生活做

有意義的陳述。質性研究（Bogdan & Biklen）用於理解人、事件與脈絡的意義，因此具有現象學的特性；它以詮釋作為媒介，客體、人們、情境與事件並不具備自己的意義，要理解他們，我們必須要理解與界定他們的歷程，研究者需要進入現場實地觀察，因此具備符號互動學的意涵；而且，研究者需要進入特定團體，去理解某些獨有的環境條件並親自執行研究，所以也具有民俗方法論的基礎。

教學實驗法（teaching experiment methodology）（Steffe & D'Ambrosio, 1996：274）為一概念性（conceptual）和探索性（exploratory）的工具，具有理解學生當下知識內涵與形成歷程的特質，是一個活的研究法（a living methodology）；它包括一系列學與學的對話（a sequence of teaching episodes），是對教學實驗內容與歷程的一種反省式的概念分析（a retrospective conceptual analysis），可用於理解教師能不能做以及能如何做的程度。Steffe & Thompson（2000）運用此法描述與二年級生 Maya 經過「數數」教學實驗的學習結果與成長；他們視教學實驗為一種研究工具，來幫助自己更理解學生的數學知識內涵與形成過程，並透過實驗研究的過程重構自己的數學教學知識。本研究則透過 MT 和 MTE 的合作研究，讓 MT 藉助某些教學片段、對話及學生對問題解答所提供的理由，理解直觀對學生學習機率概念的影響，並反思類比、衝突介入、小組合作等教學策略對高中生學習機率的幫助，以及介紹 IRT 對學生的影響。限於篇幅，本文報導偏重於「IRT和引動後設認知」部分（即參四（一）（三）（四））的研究結果。

行動研究（action research）就是把行動和研究結合起來（黃政傑，1985）。在教育行動研究中，每一位教師（或師培者）都是研究者，每一個教學實施的場域都是課程的實驗室。Kemmis 及 McTaggart（1988）提出行動研究模式的核心概念是，計畫、行動、觀察、反思及再計畫的自我反思循環歷程。它是一個螺旋式的循環，包含了數個循環和不斷前進的機制，前一循環的研究會解決部分的原有問題，但是也會產生新問題，需要行動者再次修正原有的計畫，展開新的行動循環。透過這樣的螺旋式循環來解決實際面對的教學問題，可以引動教師或師培者的專業發展。

本研究結合行動研究和教學實驗設計，以質性研究取向為主，輔以教室觀察、問卷調查、選樣晤談及 T-TECOP 運作，分成起始期和螺旋期兩個階段，在螺旋期之中又包含兩個小循環（請先參考圖 2）。在每一循環結束之前，我們一起反思每一歷程的實施情形；並在 T-TECOP 的討論之後，共同修正 MT 教學的內容和策略，據以實施下一循環的實務行動。這是一個動態循環發展的歷程，每一個階段的出現都是前一階段發展和省思的結果。在每一階段的教學行動中，我們均參照「教學實驗」的設計，於該階段進行之前、當中以及之後，蒐集和整理各類實徵資料，一起詳細觀察、記錄和反思 MT 與個案學生的教學互動情形，以便立即掌握、評估和調整「當下教學試驗」的成效。這種「分階段逐次發展而成的多步驟教學研究」結合了行動研究和教學試驗研究的優點，似有「行動研究中的教學試驗」的味道。

MT 任教於一所台北市的公立女子高中，可招收到北區表現最好的國中生，學生素質佳、吸收與學習能力強、自我的要求嚴格、自動自發而且凡事積極，因此學習成就相當高。課堂數學教學多採教師講述，而老師可以專心於自己的教學，不太需要擔憂教室管理的問題。參與本研究的學生為 MT 的

3 個高三社會組班級（01、02、03 班），每班人數皆為 40 人。MT 從高二開始即擔任她們的數學教師。該校採常態分班，在本研究之前這 3 班的期中考與期末學期成績並無太大差異，也都習慣分組討論。其中的 01 班學生最勇於表達意見，雖然她們不見得會出現最佳的解法，但在每每遇到問題之時，都最有想法也最有自信。所以，第二階段的研究就以 01 班為教學觀察的對象。

九十二學年度上學期（92.9~93.1）為起始期，MT 先參酌文獻擬出試題，藉同校同年級學習成就相近的 1 班學生實施預測，再經 T-TECOP 的討論，調整與確定前測問卷的內容，並在首次複習高三數學乙（龍騰版第四章）機率與統計單元之前實施前測。在分析 3 班學生的反應之後，我們初步研擬直觀教學的步驟、策略與內容，並觀察學生機率概念的學習轉變。MT 先複習古典和頻率（經驗）兩種不同觀點的機率概念，並配合問卷讓學生猜測其他同學的答案，使學生察覺其原生直觀；接著，利用類推比較、衝突介入和科學性概念驗證學生原生的機率直觀。也就是說，透過呈現前測的直觀迷思引起學生注意這個現象，舉例介紹 IRT 讓她們觀察其中的共同結構、了解 IRT 潛在的影響，提醒若只依據題目外在特徵和 IRT 回答可能產生的問題，並且，培養「看似正確但仍須檢驗」的態度，鼓勵她們更嚴謹的檢驗原生直觀而要對選答有更深一層的「感覺」。例如想一想，這個答案是否合理？是否在所有的情況下都合理？是否還有其他的方法可以解決這個問題？之後，引導學生猜測其他同學們的直觀迷思、原因及隱藏的 IRT。而在第一階段的「全班教學」之後實施後測，以評估學習狀況和教學成效，再實施延後測，以了解學生的學習保留狀況並做為第二階段教學的參考。

九十二學年度下學期（93.2~93.5）為螺旋期，我們根據第一階段的研究心得，於再次複習機率與統計單元時，透過「全班討論教學」將 01 班的學生分成八個討論小組，藉由同儕之間不同想法刺激學生反省和修正自己的原生直觀。我們運用後測問卷中的不同學生想法編成全班討論問卷，讓學生再次省思和檢驗各種原生想法的正確性。MT 也穿梭其間加入討論，甚至請同學以實物模擬操作、想像並與機率式連結以驗證答案，之後，總結討論結果，再次澄清先前的直觀迷思。於螺旋後期，為使學生有更充分的討論時間而選出前期中主動表示概念仍有不清楚以及經比較前測、後測、延後測有「折返現象（folding back）」（Pirie & Kieren, 1994）者共六人，實施焦點小組晤談教學（簡稱小組教學）。MT 先討論之前幾份問卷並比較相同結構的問題，讓學生說出自己的看法並引導其看見更深層的結構；之後，確認她們是否清楚全班討論教學中的內容；再利用實物模擬問題的情境，讓她們透過想像連結原始直觀了解機率式的意義；接著，以延後測的學生想法編成問卷供小組討論；最後，讓她們說明如何釐清混淆，做更深一層的反思。在小組教學六週之後，我們用評量問卷收集 01 班學生對直觀教學的意見，另用概念反應問卷收集個案的學習狀況及感受。以上兩個階段的教學行動循環及教學鷹架內容如圖 2。

二、資料的蒐集和分析

收集的方式包括課堂觀察、學生問卷調查、學生訪談以及 T-TECOP 討論；內容有 MT 與 MTE 的個人日誌、學生問卷的填答資料、學生的訪談錄音與轉譯資料、教學活動的錄影、小組教學的錄音與轉譯資料以及 MT 任教學校的部分考試測驗卷。分析資料乃參照紮根理論（grounded theory）（Strauss &

Corbin, 1998；引自吳芝儀、廖梅花譯，2003）中系統歸納程序（systematic inductive procedure）和持續比對方法（constant comparison method）之精神。MT 和 MTE 的個人日誌包括：MT 對教學活動的內容、學生特別的表現及反應與印象深刻事件的觀察記錄，MT 教學活動前後在 T-TECOP 討論的記錄，MTE 在 T-TECOP 中與 MT 或其他成員的經驗分享與討論內容速記，以及 MT 和 MTE 對蒐集所得資料的反覆省思內容與過程和實務合作研究進行、修正情形的記錄。

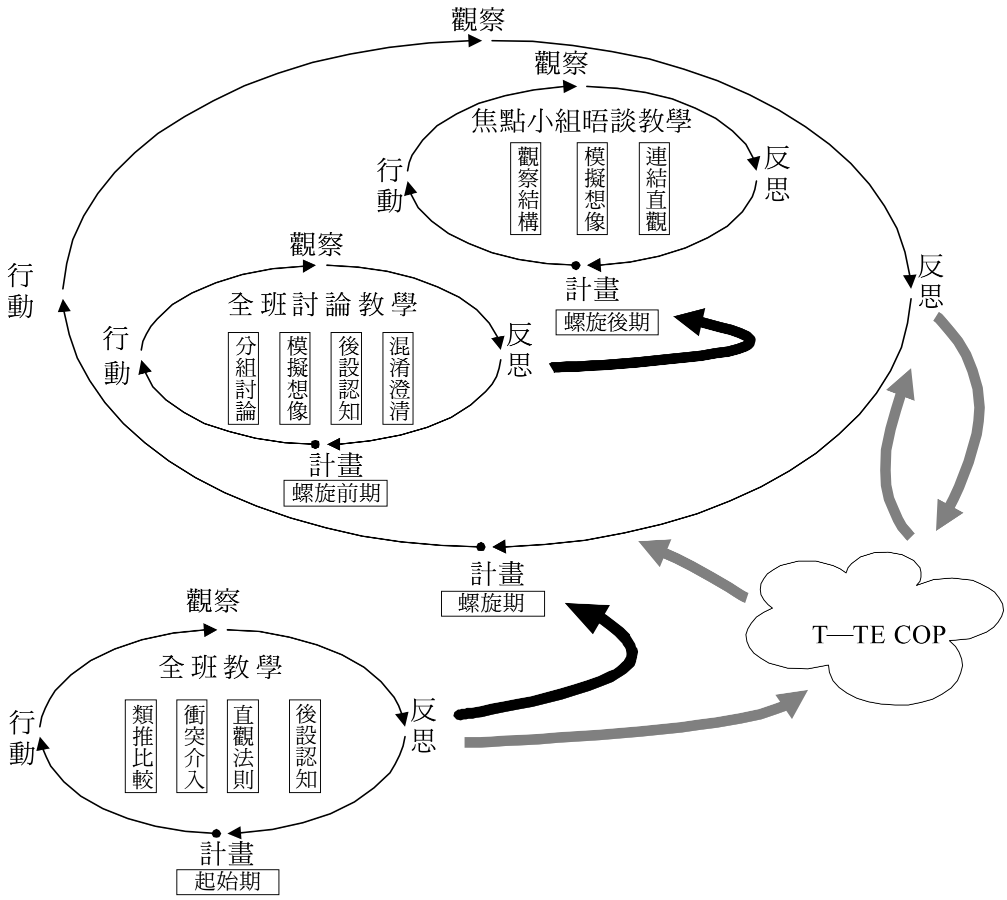

圖 2　兩階段三循環的 MT-MTE 實務合作研究設計圖

資料來源：作者自製

使用的研究問卷共有八份：起始期的前測、後測問卷，螺旋前期的延後測、全班討論問卷，以及螺旋後期的小組晤談、評量、教學回饋意見和概念反應問卷。它們是依研究進行當下的需要發展而來，也可以是一個工具發展的循環。前測問卷用來瞭解學生已有的知識、診斷學生機率的迷思概念，以預先掌握其原始直觀。我們研讀國內外有關機率和直觀的文獻、分析高中教材內容，經過 T-TECOP 的討論初步確定內容。問題包括 More A-More B 和 Same A-Same B（Stavy & Tirosh, 2000）、複合事件等機率迷思與一次投擲（Fischbein, 1991）、因果關係（Falk, 1988）和代表性捷思判斷偏誤（Kahneman &

Tversky, 1972, 1973）直觀迷思類型。後測問卷分成兩部分，第一部分「猜測別人的想法」是測試學生在接觸 IRT 之後是否瞭解其意義，以及在瞭解 IRT 之後是否能引發後設認知避免直觀迷思；第二部分用來檢驗第一階段教學後，學生的機率直觀迷思類型和教學成效。延後測問卷是檢驗直觀迷思類型教學成效的保留情形。全班討論問卷是以後測問卷的各種不同學生想法編成，做為上課的內容；它共有 5 題，前 4 題是測驗題第 5 題讓學生表達原始直觀改變的原因，以評估全班討論教學的成效。小組晤談討論問卷仿全班討論問卷，整理延後測的各種不同學生想法，並加入一些我們自行設計的題目，以做為小組教學階段的討論內容，想確認個案學生的討論成果並再次檢驗其直觀的迷思。評量問卷是確認第二階段的學習狀況，並再次評估直觀迷思類型於歷經兩階段教學之後的持續效果。教學回饋意見問卷用於瞭解在螺旋前期利用各種不同想法來猜測、判斷的做法對學習的影響，以及介紹 IRT 的學習保留情形；它採開放式設計由 01 班學生填答。概念反應問卷是針對六位個案設計的開放式問卷，想瞭解小組教學的成效；它共有「1. 請將上次討論的內容，依你的了解把它整理出來。你覺得現在是否對這些概念比較清楚？是否有什麼新領悟？請說明原因。2. 上次小組討論後，請大略描述印象最深刻的部分？為什麼？」兩題。我們再依教學後學生的表現分成 I、II 和 III 三個機率直觀思考類型（王安蘭，2005），評估兩階段直觀教學的成效。

前、後、延後測和評量問卷內容的概念及架構相似，每題皆為多選一，並要求學生說明填答的理由；它們的題目完全取自前段文中所述之相關文獻，應具備部分的專家效度，而且我們也請同校同年級的另一班學生（N=40）預試以修正內容，結果與 01 班學生的前測表現相當接近；此外，01 班學生前、後測表現的相關係數亦接近 0.8 的水準。因此，它們應該具備一定的信度與效度。其餘四份問卷則是依據行動研究當下的需要發展而來，八份問卷的詳細內容請參見王安蘭（2005）。

訪談共進行三次，分別在第一階段中、第二階段前及第二階段中進行。由於 MT 已任教該班將近一年半，與學生的關係良好也告訴學生訪談的目的，而且均徵得當事人同意錄音，並將部分錄音轉譯成逐字稿。為日後反省之需，全班教學部分均有錄影，而小組教學過程則錄音。另外，在螺旋期結束之後，我們收集了複習考及期末考中與機率有關題目的學生表現，並與實施預測的班級比較。我們也將各類資料分別編碼以便形成暫時性的主題或類別，並一再地重新組合和檢視資料中的概念，與其他相關文獻資料作交叉分析與比較，以祈更真實、精確地詮釋這些資料。例如，（全班討論，2， S0101）表示 01 班座號 1 號學生的全班討論問卷第 2 題的記錄，（訪一，31-36）表示此段對話出自訪談一的編碼序 31 至 36。

三、研究的限制

由於是以 MT 之教室為實施直觀教學的場域、任教班級學生為對象，有地區環境與學校特質的限制，因此，研究的結果僅能做有限度地推論，例如一些與該校校風和學生特質相似的教學環境。基於教師直接參與研究觀察，因此，會在不同的研究階段與層面中，不自覺地呈顯其個人的價值觀、教學慣性及解決教學問題的獨有方式；而在詮釋資料過程的取捨、教學情境的記錄也會受研究者主觀的影響。所以，資料分析的客觀性會受個人詮釋的限制。也就是說，這種經由分析教室教學活動、研究問卷與訪談資料的詮

釋性質化研究，研究者常會選擇性的使用那些符合他想法或特別突出的資料，導致影響整個研究的調查過程和結論（Maxwell, 1996；引自高熏芳、林盈助、王向葵譯，2001：136）。但是，為盡量減少這樣的限制，我們努力做到 Patton（吳芝儀、李奉儒譯，1995：308）所說的"質的分析的規範和嚴謹性，有賴於詳實的描述性資料之呈現，故經常被稱為厚實的描述（thick description）。如此方式的描述，才能使別人閱讀了分析結果之後就能理解，並能夠做出自己的詮釋。"另外，實徵資料來自所教的學生，而 MT 是她們的數學教師，由於日積月累的熟悉與相互的利害關係，學生的回答或有過度誇張的可能，也就無可避免地限制了學生學習反應的真實性。不過，學生因熟悉研究者而給的面子效應，可因研究的生態效度（MT 和學生間長時期的互動下，客觀性會取代部分的面子效應）而提升真實性。再者，MTE 和 MT 一起執行並體會行動研究與教學實驗的意義，也共同面對和解決立即的課堂機率教學問題。所以，比較著重於當下面臨的研究狀況及教學情境，似乎較難推廣至其他 MT 與 MTE 的合作情形，也就是說，它比較不具備研究的一般化特質。但是，一般化對於質化研究而言通常不是那麼重要（Maxwell）。行動研究雖是為解決獨特對象的問題，這並不表示其結果和構念不能適當地被應用。例如，本研究中所運用的兩類直觀法則的原始想法即來自以色列。事實上，如能將此詮釋或理解放在更大的數學教學脈絡中考量，或許可以成為更客觀、更普遍的知識（陳伯璋，1990）。

Bell（1985）曾提出確實性（credibility）、可轉移性（transferability）、可靠性（dependability）和可確定性（confirmability）四個維持教育行動研究嚴謹性的指標。我們在研究的各階段中蒐集多重的資料，透過長期的參與並且持續地分析、歸納、比較與校正各類的實徵資料，以降低研究者的偏見增加資料的真實性和詮釋的精確性，希望"有清楚而具體的證據支持其結論"（Bell, 1985）。本研究詳實描述研究參與者、研究場域、研究者所扮演的角色和教學理念，應可做為其他類似研究的參考或轉移依據，也就是希望"能促進與其他教師同仁間的經驗交換與相互學習"（Bell, 1985）。我們詳實敘述研究設計的理念與流程、資料蒐集與分析的方式，即是期待別人能立即理解研究者分析的結果並發展自己的詮釋，以使其他研究者能查核及運用相關的研究方法與研究構念，希望"蒐集資料的過程與所獲得的資料都值得信賴"（Bell, 1985）。我們曾在不同階段裡透過 T-TECOP 小組的共同檢視，以提昇各次教學策略與內容的適切性，也盡力完整呈現學生的各種問卷和回饋內容，詳細描述研究的過程、方法和構念，以呈現整體的研究架構。這樣的方式也許能夠盡量降低研究者偏見的影響，希望"公開呈現所有的正反訊息與處理過程，使偏見的影響盡量降低"（Bell, 1985）。

三角校正（triangulation）（Maxwell, 1996；引自高熏芳、林盈助、王向葵譯，2001）即是運用多種資料分析、各種理論方法、不同蒐集人員以各個角度交叉檢查所蒐集資料的真實性和有效性，而能讓研究者學習從其中獲得對於問題與事件更周延的看法。本研究採用學習者效化（learner validation）、同儕效化（peer validation）和自我效化（self validation）（McNiff, 1994）三種分析的策略，來提升資料的真實及有效性。首先，我們對相同的教學問題有多種的資料來源（錄音、錄影、學生訪談、學生問卷、個人日誌），在相互比對之後期能佐證或調整自己的原始想法，也同時發現更豐富的研究內涵；再持續地交叉比對、詮釋和分析這些不同類別的

資料，以檢驗研究結果的一致性和推論的有效性。其次，由 T-TECOP 成員擔任批判性的朋友（critic friend），透過討論、批判來進一步澄清我們的主觀想法；在定期的 T-TECOP 小組討論中，我們持續地將學生的表現、教學策略、教學內容、自己建構的觀點和資料分析的結果，與多位資深高中數學教師對話、討論並接受批判，藉以澄清和調整之前的想法。最後，我們盡力真實地描述整個研究過程並自省；T-TECOP 成員持續地觀察與分析 MT 的教學表現與學生的反應，並向我們提出實質的教學與研究建議，以研究-教學日誌記錄 MT 和學生之間教與學的反應及 T-TECOP 成員間的互動，藉以釐清研究盲點；再由檢視不同資料的來源、收集與分析資料的方法，期能反映研究情境與結論的真實性。

以下依行動研究持續循環與動態調整的特質及教學實驗設計的精神，報導兩階段三循環直觀教學前後的學生表現和教學成效。

伍、研究結果

一、第一階段：起始期

（一）高三生再次學習機率概念的起點

1. More A-More B

表 1 前測問卷 More A - More B 學生答題情況對照表

題號	題目	各選項之選答百分率（選答人數）						答對率
1（1）	甲袋中有 6 個紅色、2 個黑色的彈珠；乙袋中有 3 個紅色、1 個黑色的彈珠，現分別從二袋中各取出 1 個彈珠，則從哪個袋子中取到紅色彈珠的機率較大？	（A）機率相等	*（B）甲袋	（C）乙袋	（D）不知道			
		0.983（118）	0.017（2）	0.00（0）	0.00（0）			0.983（118）
2	甲、乙兩人玩一次同時投擲 3 個骰子的遊戲。約定若出現點數和為 6 是甲贏；出現點數和為 16 則是乙贏。請問誰贏的機率大？	（A）機率相等	（B）甲贏	*（C）乙贏	（D）不知道	選（B）但理由錯（忘了排序）	選（B）但理由錯（其他）	
		0.117（14）	0.75（90）	0.083（10）	0.05（6）	0.067（8）	0.05（6）	0.633（76）
3	某校有 A , B 兩個社團，其中 A 社團有女生 40 人，男生 60 人；B 社團有女生 60 人，男生 80 人，而各社團主席將從會員中抽籤選得。現有一女同學想加入其中一社團，希望使該社團女生當主席的機率增加較多，請問她該加入哪一個社團較好？	（A）機率相等	（B）A 社團	*（C）B 社團	（D）不知道			
		0.05（6）	0.550（66）	0.342（41）	0.058（7）			0.550（66）

表 1 前測問卷 More A - More B 學生答題情況對照表（續）

6	新設立的公司想要成功，必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。請問公司成功的機率與失敗的機率何者較大？	（A）機率相等	*（B）成功	（C）失敗	（D）不知道	
		0.00（0）	0.392（47）	0.575（69）	0.033（4）	0.575（69）

*表中有陰影的選項為正確答案，前有星號則表示為主要的直觀錯誤或迷思概念選項，本文以下各表皆以相同方式註記。
資料來源：作者自製

由表 1 中 4 個此類型題的表現可看出，學生並不是在所有的問題中都呈現此直觀迷思。若將第 1（1）、2 兩題的結果與國外研究比較（Fischbein, 1991）可以發現，本研究學生錯誤的比例極低（1.7%、8.3%）。可能是由於學生熟悉問題的情境，即使選擇此 IRT 的選項，大都是因為科學知識不完全所致，並非只受問題外型的影響而產生錯誤的直觀推理。而第 3、6 題的此類型之比例皆超過三成（34.2%、39.2%），前者許多學生認為「B 社團女生比例較高，所以女生當選機率比較大」，而沒考慮到「增加比例較高」與「原先比例較高」是不同的；而部分選擇（A）的學生認為 $\frac{41}{61}-\frac{40}{60}=\frac{61}{101}-\frac{60}{100}$，「因為分子分母各增加 1，所以增加的比例應該相同」，這很明顯是反映 Same A-Same B，可能是數字計算較繁雜，所以，直觀的迷思就很自然地出現了；後者許多學生認為「每個過程成功的機率皆較失敗的機率大，當然成功的機率也就會比較大」，她們忽略了必須連續六個過程皆成功才是成功。這兩題的情境是學生較不熟悉的，她們比較容易受題目語意的影響或只注意到某些特別的資訊，而將部分資訊外推到整體而產生錯誤。這正如 Fischbein（1987）所指出：大多數學生的直觀似乎相當倚賴資訊的某一部分而將其一般化並自信地做出整體的結論。學生這種只考慮了一部分相關資訊的信念，就是直觀思考與分析思考最主要的區別。

2. Same A-Same B

表 2 前測問卷 Same A - Same B 學生答題情況對照表

題號	題目	各選項之選答百分率（選答人數）						答對率
1（2）	甲袋中有 6 個紅色、2 個黑色的彈珠；乙袋中有 3 個紅色、1 個黑色的彈珠，（2）現分別從二袋中各取出 2 個彈珠，則從哪個袋子中取到 1 紅 1 黑彈珠的機率較大？	*（A）機率相等	（B）甲袋	（C）乙袋	（D）不知道	選（C）但理由錯（忘了排序）	選（C）但理由錯（其他）	
		0.333（40）	0.042（5）	0.608（73）	0.017（2）	0.083（10）	0.058（7）	0.467（56）
4	張太太想要兩個孩子，王太太想要四個孩子，假設他們都能如願，請問：張太太的孩子是一男一女的機率與王太太的孩子是二男二女的機率，何者較大？	*（A）機率相等	（B）張家	（C）王家	（D）不知道	選（B）但理由錯（忘了排序）	選（B）但理由錯（其他）	
		0.108（13）	0.808（97）	0.067（8）	0.017（2）	0.267（32）	0.05（6）	0.492（59）
5	甲、乙兩人玩遊戲，以丟硬幣決定勝負。約定出現正面是甲贏，出現反面是乙贏，每次輸的人要給贏的人 1 元。假設 P1 表示：丟完 2 次後，甲、乙無輸贏的機率；P2 表示：丟完 4 次後，甲、乙 無輸贏的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？	*（A）機率相等	（B） P1	（C） P2	（D）不知道	選（B）但理由錯（忘了排序）	選（B）但理由錯（其他）	
		0.117（14）	0.742（89）	0.083（10）	0.05（6）	0.108（13）	0.05（6）	0.583（70）

表 2　前測問卷 Same A - Same B 學生答題情況對照表（續）

7	假設 P1 表丟 1 個公正硬幣 3 次中，至少出現 2 個正面的機率 P2 表丟 1 個公正硬幣 300 次中，至少出現 200 個正面的機率請問：P1 與 P2 何者較大？	*（A）機率相等 0.450 （54）	（B） P1 0.258 （31）	（C） P2 0.117 （14）	（D）不知道 0.175 （21）	0.258 （31）

*第 5 題有 1 人同時選擇（A）和（B）。
資料來源：作者自製

由表 2 中 4 個此類型題的表現可看出，Same A-Same B 平均比例較之前的 More A-More B 高。Stavy 及 Tirosh（2000）曾以第 4 題詢問七到十二年級的學生，發現答對率相當低而且沒有一個年級超過 46%。大部分的學生認為，兩個家庭中有男生、女生的比例相等，因此，兩者的機率也是相等的（即 IRT），即使年齡較大的學生也無法避免。本研究的學生在這題中有此 IRT 表現的約佔一成，有 2 位學生混淆了機率與排列組合概念，寫著「$P_1=C_1^2\times C_1^2=4$，

$$P_2=C_1^2\times C_1^2\times C_1^2\times C_1^2\times\frac{1}{2!2!}=4$$」，

其他表示「因為兩家男孩、女孩比例相等，所以機率相等」和「生男生女的機率皆為 $\frac{1}{2}$，達到男女平衡的狀態的機率必定是 $\frac{1}{2}$」。可見學生選擇 Same A-Same B 答案未必是有此 IRT 的反應，而有此 IRT 反應的想法也未必相同。雖然，答對率高達八成（80.8%），但是，從學生所寫的理由中發現有「複合事件等機率的迷思」（王安蘭，2005）。這與 Stavy 及 Tirosh 的結果有些差異，可能是因為學生曾經學習過相似問題，因此，只受比例敘述影響而產生不當推理的情形較少，但是，由於科學性知識仍不足而會有複合事件等機率的迷思。

第 5 題與第 4 題數學結構相同而情境不同，學生的直觀迷思的比例卻都在一成上下（11.7%、10.8%）。有趣的是，第 5 題選擇（B）的比例較第 4 題低而答對率卻較高。我們推測第 4 題是熟悉的情境，學生比較容易列出樣本空間或寫出機率算式；第 5 題的情境比較複雜，有些學生無法直接寫出算式而利用樹狀圖求算，因而降低了複合事件等機率迷思之比例。其中，有位學生在第 4 題中曾列出正確算式，卻在第 5 題中選擇（A）和（B），她的理由是「因為無輸贏，所以正面的次數=反面的次數，因此二者機率相等。P_1：正反、反正、正正、反反

$\therefore\frac{1}{2}$，P_2：正正反反 $\therefore\frac{\frac{4}{2!2!}}{2^4}=\frac{3}{8}\Rightarrow P_1>P_2$」。

當 MT 問：妳覺得答案是（A）或是（B）？她說「直覺上是（A），但是計算的結果是（B），因為不確定哪一個是對的，所以把兩個想法都寫下來」。MT 再問，那第 4 題呢？她表示，第 4 題是很熟悉的題目上課也時都這樣算。由此可見，在不熟悉的情境下，學生會很自然地使用自己的原生直觀去解決數學問題。

Fischbein 及 Schnarch（1997）曾以第 7 題詢問五、七、九、十一年級生與大學生，發現認為機率相等的比例很高，而且，這樣迷思的中學生比例有隨著年紀逐漸增加的趨勢。他們認為 $\frac{2}{3}=\frac{200}{300}$ 而選擇機率相等，這是忽略了樣本空間的大小又不當地使用等比例基模推論所致。由此可看出，直觀對學生在解題上的強制性。他們猜測，此類迷思可能是受教學及智力發展的影響，亦即，比例概念發展比較成熟的學生更容易依據比例概念作答而忽略了樣本大小的影響。本研究的學

生有此 IRT 表現的比例約為 45%與 Fischbein 及 Schnarch 的大學生表現相近；但是，選擇正確答案的學生卻只有約 25%。這或許是因為，有些學生在列出正確的機率式子「$P_2=\dfrac{C_{200}^{300}+C_{201}^{300}+....+C_{300}^{300}}{2^{300}}$」之後，由於數字龐大而不知該如何計算而選擇了答案（A）或不知道；也可能是，這題中選擇此 IRT 的比例較第 4 題高出許多的原因。也就是說，當無法使用科學性知識時，會凸顯「成比例」的概念，於是，學生即將不完全正確的資訊過度地一般化而外推到整體。

第 1（2）題比 1（1）題的情境複雜，學生有此 IRT 的比例約佔$\frac{1}{3}$。在 Green（1983, 引自 Stavy & Tirosh, 2000）的研究中，部分學生也有 More A-More B 反應，而本研究的學生是再次學習機率概念，已有基本的認知，所以未出現此反應。由於機率概念與比例概念相當有關，所以，學生易受比例相同的影響而呈現出此 IRT。這也許就是 Same A-Same B 的直觀迷思比 More A-More B 高的原因，也凸顯了直觀與結構基模的深層關係，而且，它們會隨著年齡的增長而演化（Fischbein & Schnarch, 1997）。我們許多選（A）的學生會寫出「$P_1= C_1^2(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})=P_2$」或「$P_1=(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})=P_2$」，並非單純只因兩袋中紅黑球數的比例相同就認為二者機率相同，而是忽略了從袋中取出一球之後，袋中的球數就會改變（機率就不再是$\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$）。所以，她們並非只依題目外型判斷而是忽略了某些隱藏的資訊。

（二）直觀教學對高三生再次學習機率概念的影響

1.教學前後學生的表現

(1)More A-More B

表 3　後測問卷 More A - More B 學生答題情況對照表

題號	題　目	各選項之選答百分率（選答人數）					答對率
1	從 10 人中選出 4 人的可能情形，與從 10 人中選出 7 人的可能情形哪一種較多？	（A）一樣多	（B）選 4 人	*（C）選 7 人	（D）不知道	選（B）但理由錯	
		0.01 （1）	0.94 （113）	0.02 （2）	0.03 （4）	0.01 （1）	0.93 （112）

資料來源：作者自製

由表 3 可看出，學生幾乎沒有再出現此 IRT（答對率 94%）。選（C）的 S0227 理由是「選的人比較多，情況比較複雜」，另一人則是計算選出後、再排列的情形。而在前測第 1（1）題中，也只有 S0227 呈現此 IRT 的傾向。她告訴 MT「從小就不喜歡數學，背數學比背國文還困難，許多問題她不是用背的就是用猜的」，可以想見，她的判斷非常容易受直觀迷思的影響。Fischbein 及 Schnarch（1997）也曾探討此題，發現年紀愈小的學生愈容易呈現此 IRT，而年齡愈長者則認為「選取 4 人之情況比選取 7 人之情況容易」而有「人數愈少可選取的情況愈多」的強烈直觀。由於本題的數學概念簡單，而計算組合數對大部分的學生來說比較容易，所以我們想知道的是：如果這是正確選項，那麼在教學之後，學生的理由會是什麼？她們會不會先使用直觀判斷，再用科學知識去檢驗？結果學生選（B）

的理由（除了 3 人之外）大都用「$C_4^{10}=210$，$C_7^{10}=120$」計算而得，而這 3 位學生的理由分別是：

S0135：（1）$C_4^{10}=210$，$C_7^{10}=120$（2）所選的人數愈少被選中的機率就愈小，可見選的人數愈少情形愈多。

S0239：（1）7 人較多，變化較少
（2）$C_4^{10}=210$，$C_7^{10}=120$。

S0317：4 人比較少，選取情況比較多。

她們的想法與國外學生相同，但是，S0135 與 S0239 除了寫出直觀的想法外，還用計算的方法驗證。後來，MT 再問她們：為什麼寫兩個理由？S0239 說「一個是直覺，可是想到**直觀不一定正確**，所以再加上計算檢查」，而 S0135 說「**計算的一定對，可是直觀不一定對**，但是我的直覺是這樣，所以又補上第二個理由」。所以，學生的直觀想法或許不一定正確，但是只要清楚這個問題所需要用到的科學概念，在經過直觀教學之後，她們大都知道「要再次檢驗自己的原始直觀」。

(2)Same A-Same B 與複合事件等機率迷思

表 4　後測問卷 Same A - Same B 與複合事件等機率迷思學生答題情況對照表

題號	題目	各選項之選答百分率（選答人數）							答對率
2	假設；P1 表丟 2 個均勻骰子時，恰好出現 1 個偶數點的機率，P2 表丟 4 個均勻骰子時，恰好出現 2 個偶數點的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？	*（A）機率相等	（B）P1	（C）P2	（D）不知道	選（B）但理由錯（忘了排序）	選（B）但理由錯（混淆）	選（B）但理由錯（其他）	
		0.04（5）	0.89（107）	0.06（7）	0.01（1）	0.07（8）	0.05（6）	0.18（21）	0.6（72）
3	某個公司年終賣摸彩票（共 10 張）讓大家抽獎，已知彩票內有一半的票是有獎的，若 P1 表買到 2 張，2 張中恰有 1 張中獎的機率，P2 表買到 4 張，4 張中恰有 2 張中獎的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？	*（A）機率相等	（B）P1	（C）P2	（D）不知道	選（B）但理由錯（沒注意總數）	選（B）但理由錯（混淆）	選（B）但理由錯（其他）	
		0.07（8）	0.87（104）	0.05（6）	0.02（2）	0.51（61）	0.07（8）	0.08（9）	0.22（26）

資料來源：作者自製

表 4 中第 2 題與前測第 4 題相似，答對率雖然只增加了約一成（49% → 60%），但是，此 IRT 的比例卻降低了（11% → 4%），而且，選（B）但忘了排序（即複合事件等機率迷思）的比例則降低了二成（27% → 7%）。同樣地，若將此題與前測第 5 題比較，無論從整體答對率（58% → 60%）、此 IRT 的比例（12% → 4%）或忘了排序之比例（11% → 7%）來看，學生直觀迷思的比例是降低了些。或許這是 MT 剛上完這個部分的課程，學生的記憶猶新，卻也顯示出直觀教學的正面意義。由於這兩題非常相似，許多學生直覺上認為這兩題是一樣的，例如，她們會寫「同上題」或「和上一題，還有生男生女的問題是一樣的」。這可能也是她們沒能掌握，其一為二項分布題另一為超幾何分布之故。

(3)不熟悉情境問題的直觀反應

對於不熟悉的情境，學生會因為問題敘述不同處而有不同的直觀表現（請參見表 5 之(A)、(C)選項，分別為 39%、23%）。有些學生關注於「連贏兩場」，認為賽程一、二中的對手皆是強弱相間，所以，無論選哪一個賽程得勝機率皆相同而出現 Same A-Same

B，例如：

S0102 強弱交替出現，若連贏 2 場則先和強 or 先和弱打是沒有差的。PS.若要贏 3 場則有差。

S0109 機率一樣，次序不一樣應該沒關係。

S0119 因為每打二場中都是一個強一個弱，so 連贏的機會都一樣。

S0201 都是強弱相間。

S0316 前後場次的對手順序並不會影響得勝的機率。

S0324 連續→兩場為一組觀察→皆為一強一弱。

表 5　後測問卷學生對不熟悉情境問題的直觀反應答題情況對照表

題號	題　目	各選項之選答百分率（選答人數）					答對率
		*（A）機率相等	（B）賽程一	*（C）賽程二	（D）不知道	選（B）但理由錯	
4	小王有二位愛打網球的球友，實力為一強一弱。假設小王和強者對打一局，小王得勝的機率為 0.1；和弱者比賽，小王得勝的機率為 0.8。現在依對手是誰，有下列兩種賽程可供小王選擇，而且只能選擇一種，小王若能至少連贏兩場，即可得獎。請問小王應選擇哪一個賽程得獎的機率較大？ 賽程一 強者 弱者 強者 賽程二 弱者 強者 弱者	0.39 （47）	0.37 （44）	0.23 （27）	0.02 （2）	0.04 （5）	0.33 （39）

資料來源：作者自製

有些學生則關注於「賽程表」，認為與強者比賽場數愈多失敗的機率會愈大，而出現 More A-More B，例如：

S0116 連贏兩場才有獎而且贏強者機率較低。

S0137 贏弱者比較容易，我知道我錯了，可是錯在哪？

S0326 要多和弱者打，贏的機會較大。

還有些學生，似乎同時出現這兩種 IRT，如 S0239 的「好怪…，好像一樣，但（C）遇見弱者較多，比較合理」和 S0114 的「因為在賽程一連贏兩場的話，其中必定要面臨一位贏的勝算較低的強者⇒得獎機率低。但是，現在又覺得既然要連贏兩場，一樣都要碰到強弱、弱強，所以機率相等」。

所以，在不熟悉的問題情境下，學生會傾向使用 IRT 解決問題。其實，許多答錯的學生也會列出機率算式或樹狀圖，只是，或因畫出不出完整的樹狀圖（如選（C）者）或因 IRT（如 Same A-Same B 的 P（賽程一）= 2（0.8）（0.1） = P（賽程二）及 More A-More B 的（賽程一）= （0.1）（0.8）（0.1）<P（賽程二）=（0.8）（0.1）（0.8））。經過直觀教學後，學生雖然知道應該要檢驗自己的直觀卻仍受制於科學性知識的不足，例如「**<u>死性難改吧</u>**！考試時的氣氛容易讓人以直觀為重，我也知道該用科學方法去檢驗直觀，但有點辦不到」（教學回饋意見，1，S0137）。

2.介紹 IRT 的影響

後測問卷第一部分的答題統計（如表 6）顯示，有大約四分之三（83%、75%）以上的學生瞭解 IRT，而且有幾位學生甚至表示「不會有人再選擇直觀錯誤的答案了」。例如，在第 2 題選項（A）機率相等旁邊，S0221 寫著「在

上過課後，大家應該不會再選這個答案了吧！」，而 S0309 則表示「老師教過直觀法則了，應該不會有人選」。從第二部分的討論中亦可看出，在知道 IRT 之後，大部分學生都知道要用計算或其他方式再次檢驗自己的答案。

比較前後測答題的情形可以看出，學生直觀錯誤迷思的比例已降低許多，而第 1 題的答對率也有提昇（58%→71%）。學生理由顯示，原來受制於 IRT 的學生都已瞭解、改正或發現原來的疏忽，明白「成功必須是在每個階段皆成功」的道理。可是，第 2 題的答對率看似提昇許多（29%→53%），其中，卻仍有不少學的理由是「丟的次數多，出現正面的機會多」，可見，當科學性知識不足時她們雖然知道「不要受 IRT 的影響」，但是卻又掉入另一個直觀的陷阱中。

所以我們認為：大部分學生確實知道並察覺自己可能使用的 IRT。以下摘錄四段 MT 與個案學生的訪談對話，說明介紹 IRT 的影響（訪談逐字稿請參見王安蘭 2005）：

表 6　後測問卷第一部分學生答題情況對照表

題　　目	答案 IRT	正確	直觀錯誤	非直觀錯誤	總計
1. 新設立的公司想要成功，必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。請問公司成功的機率與失敗的機率何者較大？		失敗	成功	機率相等	
	說出 IRT	**0.58（69）**	**0.26（31）**	**0**	**0.83（100）**
	無法看出 IRT	**0.14（16）**	**0.03（3）**	**0.01（1）**	**0.17（20）**
	答題情形比較 後測	0.71（85）	0.28（34）	0.01（1）	
	答題情形比較 前測	0.58（69）	0.39（47）	0.03（4）	
2. 假設 P1 表丟 1 個公正硬幣 3 次中，至少出現 2 個正面的機率 P2 表丟 1 個公正硬幣 300 次中，至少出現 200 個正面的機率請問：P1 與 P2 何者較大？		P_1	機率相等	P_2	
	說出 IRT	**0.44（53）**	**0.15（18）**	**0.16（19）**	**0.75（90）**
	無法看出 IRT	**0.09（11）**	**0.08（9）**	**0.08（10）**	**0.25（30）**
	答題情形比較 後測	0.53（64）	0.23（27）	0.24（29）	
	答題情形比較 前測	0.26（31）	0.45（54）	0.29（35）	

資料來源：作者自製

MT：那 17 為什麼妳原來選機率相等？為什麼現在會改變答案？

S0117：因為，老師上次有教到一題（前測第 4 題），因為，老師上課說“比例相同就機率相同” 這件事不一定是對，數量變多機率就改變了，所以，我想機率應該會改變。

MT：所以，妳覺得這跟我上課有關？

S0128：有（肯定的回答）。因為，老師有提到一題，我記得後面的答案是 $\frac{3}{8}$，是那種一開始都會覺得兩個答案都是 $\frac{1}{2}$ 的題目，老師上課講完，結果後面的答案是 $\frac{3}{8}$。所以，這題就用同樣的方式去想，所以，不會相等。

MT：那妳現在改變答案的原因是什麼？

S0126：可能因為，老師上課談到直觀法則吧！我不記得了，我覺得（A）不可能呀！

MT：看妳考卷（後測）上寫的，你原先的想法是用類推的，所以會變小？

S0133：對。老師你上課也是有讓我們看數量一直變化的情況，也有用類推的方式。就是 3 次中至少出現 2 個，然後變成 6 次中至少出現 4 個，結

果就變小，所以，感覺上它會變小，就是，取一個類似的情況來比較…。

MT：妳記不記得原來寫什麼？

S0133：原來寫機率相等吧！（不確定的聲音）

MT：為什麼覺得原來妳寫機率相等？

S0133：感覺上那個比例是一樣的。

MT：那你現在為什麼改變答案？

S0133：因為，上課講過。

MT：講過什麼？

S0133：就是**類推**的那個，類推的方法。

MT：為什麼修正比例關係？

S0133：因為，老師強調過了…（指 IRT）。

（訪談一，110-121）

這些對話顯示，學生能夠回想起類推的方法，她們知道 IRT，由於科學性概念尚不完全，甚至開玩笑地說：是用猜測 MT 的心理作答。所以，讓學生有察覺與反思的能力並嘗試提昇其科學性概念認知的能力，是我們應該再努力的方向。

3.原生直觀的影響

雖然，學生直觀的迷思似乎已有部分改善，但是，即使列出正確的機率式，卻仍有學生在問卷表達：

S0109 這種題目答案有時一樣有時不一樣，真令人混淆啊～搞到最後，都不知道自己的答案是對的還是錯的。（寫在第 2 題旁）

和上一題一樣，但是，感覺機率應該要一樣啊！（寫在第 3 題旁）

S0114 此題好像跟上題差不多，但是，我還是覺得兩題答案不相同。害我 confuse 了啦！（寫在第 3 題旁）

S0136 我知道（A）一定錯，但是，我不確定我想的是否對？（寫在第 2 題旁）

老師，好難喔！直觀上均是 $\frac{1}{2}$ ，但是，再想一下好像又不是咧？（寫在第 3 題旁）

S0105 總覺得有點怪怪的。（寫在第 3 題旁）

我們認為，這些學生的原生直觀仍然相當頑固，在直觀教學介入之後，由於科學性知識告訴她們「原生直觀是不適用的」因而處於掙扎、混淆之中。這也似乎表明：某些學生內在原生想法和外在客觀知識之間的競爭關係。

（三）本階段的省思

從這個階段學生的表現來看，直觀迷思的比例確有降低的趨勢，而答對率也增高一些，而且也知道要用科學性知識去驗證原生直觀。但是，我們卻無法確認：這些成效是強記或是理解而得。我們有「如何調整下一階段的教學策略與內容？」的疑問。有些學生對教學內容有部分的印象，卻仍容易混淆，我們推測可能是：本階段教學是由科學性概念的觀點出發之故。所以，只有引入科學性概念似乎是不夠的，也就是說，即使 MT 很清楚的告訴學生「她的想法錯在何處」，她下次還是有可能呈現相同的反應。我們應讓

學生自己發現錯誤而有所省思，否則即使用再多的方法或觀點來看問題，她們也只是陷在無法確定哪一個正確的掙扎中，無法產生真正的理解。從與學生的訪談和討論中發現，當有人說出接近正確答案時，也會刺激其他人有新的想法而求出正確的答案。還有，在討論中，MT 曾經舉了一個極端狀況的例子，企圖引導 S0136 發現結果與她的原生想法矛盾，希望引起概念衝突而察覺錯誤。但是，她並未如 MT 所預料，立刻發現自己的錯誤，而是有其他學生（如 S0109）先發現了，在經過學生的相互討論之後才發現問題所在。可見認知衝突或許需要經由學生間「互動、討論、辯證和澄清」的過程，才能顯現出它的價值。

Skemp（許國輝譯，1995）認為，教師應與學生的 delta2 合作，以讓 delta1 適時地發揮功能。Fischbein 及 Grossman（1997）認為，創造一個挑戰的情境可以鼓勵學習者直覺地猜測；透過學生對個人的猜測和認知衝突，可以克服直觀的障礙、促進數學理解。雖然，我們曾試過喚起學生察覺與反思的能力（delta2），幫助學生克服直觀的障礙，但是，學生卻處於另一個層次（delta1）而無法領會。我們再次仔細地省思：若教學策略是正確的，那麼就應該修正方法；是不是因為溝通與討論不夠充分，以致於學習緩慢的學生無法跟上？我們想著力的是「需要驗證的過程」，而學生卻收到「直觀都是錯」的訊息。“溝通似乎是有助於反思智慧發展的一個主要因素，而且，教師無法取代學習者腦海內 delta2 的工作”（Skemp, 1987；引自陳澤民譯，1995：66）。所以，我們想在合作的關係下以良好的學習情境和材料，讓學生自由建構基模。

二、第二階段：螺旋期

（一）教學的起點：IRT

表 7　延後測 More A-More B 01 班學生答題情況與前、後測比較對照表

測驗別	題目	各選項之選答百分率（選答人數）				答對率
		（A）機率相等	*（B）成功	（C）失敗	空白	
前測	6.新設立的公司想要成功，必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。請問公司成功的機率與失敗的機率何者較大？	0（0）	0.375（15）	0.575（23）	0.05（2）	0.575（23）
後測（第一部份）	1.新設立的公司想要成功，必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。請問公司成功的機率與失敗的機率何者較大？	0（0）	0.325（13）	0.675（27）	0（0）	0.675（27）
延後測	**3.小明的老師設計了一個“過五關”的闖關遊戲，老師為了提高同學的興趣及信心，乃特別設計每一關過關的機率皆為 0.8，請問：小明成功闖過五關的機率大或是失敗的機率較大？**	0.025（1）	0.025（1）	0.95（38）	0（0）	0.950（38）

資料來源：作者自製

表 7 中顯示，01 班學生延後測的答對率大幅提高（57%→95%），而且直觀的迷思也降低許多（37.5%→2.5%），似乎表明了第一階段直觀教學的正面效果。特別是，當時 MT 只是介紹 IRT 並檢討幾個相關問題，就直接讓學生在後測中猜測其他人的想法並修正自己的答案，而答對率就上升約一成。這可能是有些學生只是受直觀整體性的影響而忽略了某些資訊，只看到每一關成功的機率較大就立刻做了判斷，但是，在認識了 IRT 之後就能自行修正迷思。由此可見後設認知的助力，它扮演像似「良師」的角色。

表 8　延後測 Same A-Same B 二項分佈 01 班學生答題情況與前、後測比較對照表

測驗別	題目	各選項之選答百分率（選答人數）							答對率
前測	4.張太太想要兩個孩子，王太太想要四個孩子，假設他們都能如願，請問：張太太的孩子是一男一女的機率與王太太的孩子是二男二女的機率，何者較大？	*（A）機率相等	（B）張家	（C）王家	（D）不知道	選（B）理由錯（忘了排序）		選（B）但理由錯（其他）	
		0.1（4）	0.8（32）	0.075（3）	0.025（1）	0.225（9）		0.1（4）	0.475（19）
後測	2.假設；P1 表丟 2 個均勻骰子時，恰好出現 1 個偶數點的機率，P2 表丟 4 個均勻骰子時，恰好出現 2 個偶數點的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？	*（A）機率相等	（B） P1	（C） P2	空白	選（B）理由錯（忘了排序）		選（B）但理由錯（其他）	
		0.025（1）	0.9（36）	0.075（3）	0（0）	0.05（2）		0.125（5）	0.725（29）
延後測	**5.有一工廠大量的製造某產品，根據過去經驗其中有 90%是品質優良，10%是有瑕疵的不良品。現有一品管員從生產線中連續取出 3 個來檢查，其中恰有 1 個是不良品的機率為 P_1；連續取出 6 個來檢查，其中恰有 2 個是不良品的機率為 P_2，請問：何者較大？**	***（A）機率相等**	**（B） P1**	**（C） P2**	空白	**選（B）理由錯（忘了排序）**	**選（B）（以有限個數計算）**	**選（B）但理由錯（其他）**	
		0.050（2）	0.850（34）	0.025（1）	0.075（3）	0.100（4）	0.075（3）	0.075（3）	0.600（24）

資料來源：作者自製

表 8 顯示，延後測中已無 Same A-Same B 的反應，但是，沒有注意總數是有限的迷思仍無太大改善，這與條件機率有關。由於，在文組的教材中並沒有特別提到這些概念，只是讓學生以直觀來區分，這應該是本階段直觀教學的重點之一。

（二）學生評量問卷 IRT 的表現

表 9　評量問卷 More A-More B 01 班學生答題情況對照表

題號	題　目	各選項之選答百分率（選答人數）				答對率
		（A）機率相等	（B） P1	*（C） P2	空白	
1 （1）	將一公正骰子其中一面著上白色，其他五面著上黑色。 連續投擲這枚骰子 2 次，P1 表恰出現 1 次白色的機率，P2 恰出現 1 次黑色的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？	1.00 （37）	0.00 （0）	0.00 （0）	0.00 （0）	1.00 （37）

資料來源：作者自製

表 10　評量問卷 Same A-Same B 01 班學生答題情況對照表

題號	題　目	各選項之選答百分率（選答人數）						答對率
1（2）	將一公正骰子其中一面著上白，其他五面著上黑色。P3 表連續投擲這枚骰子 2 次，恰出現 1 次白色的機率，P4 表連續投擲這枚骰子 4 次，恰出現 2 次白色的機率，請問：P3 與 P4 何者較大？	*（A）機率相等	（B）P3	（C）P4	空白	選（B）理由錯（忘了排序）		
		0.00 （0）	0.919 （34）	0.027 （1）	0.027 （1）	0.027 （1）		0.919 （34）
2	某次民意調查，從隨機抽樣的 200 人中得到對三位候選人的支持率如下表所示，現從這 200 人中任選 4 人，若 P1 表 4 人中恰有 1 人支持 A 候選人的機率，P2 表 4 人中恰有 2 人支持 A 候選人的機率，請問：P1 與 P2 何者較大？ 候選人　A　B　C 支持率　25%　35%　40%	*（A）機率相等	（B）P1	（C）P2	空白	選（B）理由錯（忘了排序）	選（B）理由錯（沒注意總數有限）	
		0.000 （0）	0.973 （36）	0.027 （1）	0.000 （0）	0.027 （1）	0.108 （4）	0.838 （31）

資料來源：作者自製

雖然，表 9 顯示學生的 More A-More B 答對率是 100%，可是，S0105 既列出完確算式也選了正確答案，卻表示「ps.我怎麼會直覺 P_2 比較大啊？！？！？！☹」。這是否透露出：原生直觀與科學性知識仍然在她心中擺盪著？表十則顯示學生大致已無 Same A-Same B 的反應。

（三）介紹 IRT 的影響

有少部分學生在教學回饋問卷中表示：知道 IRT 幫助不大，例如：

S0135　有時有，但大多數時候是沒有，因為，容易被自己的直觀所誤導。

S0104　有，但還是易被直觀導向錯誤之答案。

S0127　知道直觀不一定是對的，但我常常搞混，知道會檢驗，但有時還是會錯。

S0118　直觀喔，就是常識啊，知或不知直觀法則，結果都一樣，因為，就是會跟著感覺走！

S0141　擋不住自己直觀的想法，所以知道直觀法則沒什麼幫助。

可見，她們受制於直觀的強制性，其中，有 73.7%學生曾明確表示「直觀法則是有幫助的」。以下將她們自述的轉變情形，整理成四點：

1. 不再輕率憑自己的原生直觀作答

S0117　我原來做題目時，很多東西都會直

接用直觀判定，但知道直觀法則後，<u>**知道直觀不一定完全正確**</u>，因此，<u>**用直觀判斷問題時，都會再多思考幾次，不會太輕率地做答**</u>。

S0138 <u>**不會草率憑直覺作答**</u>，除非真的沒辦法以邏輯推理出任何事，<u>**在作答前會多思考一下**</u>。

S0133 <u>**有時候直觀會騙人，還是要**</u>仔細<u>**思考**</u>，我覺得要運用的很好，還是得多看不同的例子和想法。

S0111 <u>**直觀有時可以想出正確的答案，但有些時候並不一定正確**</u>，因為，在直觀之下，<u>**會忽略某些應列入考慮的東西**</u>。

2. 會用多種方法驗證自己的原生直觀

S0114 很多時候直觀給人看起來很對的感覺，<u>**不可以全部相信**</u>，要用多種想法去驗證。

S0134 原本依據直觀寫的答案，都是沒有確實根據的，以後寫答案就會特別小心，會<u>**用邏輯再次檢查**</u>。

S0123 Same A 不一定 Same B，了解直觀法則後，會避免自己去犯那樣的錯，<u>**對算出的答案做 double check**</u>。

3.會平衡原生直觀與科學驗證以釐清觀念

S0129 直觀而得的想法，正確與否是不一定的，因此對於第一眼的想法，<u>**我了解不應完全信任它**</u>，反而更能釐清觀念。

S0126 <u>**會懷疑自己的直觀，所以**</u>通常<u>**會計算驗證**</u>。學會如何在直觀與計算驗證中取得平衡，有助於思考的釐清。

4.會從不同觀點看問題並修正自己的原生直觀

S0130 通常直觀對我來說，是對很多問題下手的第一步，當然，有的時候也不免被錯誤領導，<u>**但如果嘗試以不同觀點看問題而發生矛盾，同樣也會促使我修正直觀**</u>，而慢慢地試著把對它的修正，也<u>**變為一種直覺反應**</u>。

經過兩階段的直觀教學，我們深刻地感受到：大部分的 01 班學生應該處於如 S0102「現在邏輯比較清楚而且知道直觀法則之後比較不會受直觀影響」的狀態。在 93 年學測中，曾有一題與機率無關卻很容易出現直觀迷思的問題，如下：

> 台灣證券交易市場規定，股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價（即最後一筆的成交價）的漲、跌 7%範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在 93 元至 107 元之間。假設，有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤（也就是每天跌 7%），緊接著，卻連續五個交易日以漲停板收盤（也就是每天漲 7%）。請問：經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？（1）39 元（2）39.5 元（3）40 元（4）40.5 元（5）41 元。

在 MT 所教的學生當中，很多人一眼就看出這是 Same A-Same B 的問題。她們很興奮的表示「現在已不會只看到<u>**漲 7 次、跌 7 次**</u>就認為一定是<u>**不賺不賠**</u>。」我們樂觀地推測：這也是因

為她們知道了、體會到了 IRT 的教育意義與思維特質，使得心中總有個聲音時時在提醒著她們吧！

在這些肯定 IRT 教學的學生中，最令人感動的是 S0130 所指出的「修正直觀」，即 Fischbein 等人（1971）的二階直觀：能將一種詮釋從一個學習過的概念轉換成一種信仰。Resnick（1999）也認為，直觀是可以學習的、是可以從最初的直觀經由形式的教育而進化到二次（階）的直觀；Hahn（1956；引自 Fischbein，1987）也主張可以改變直觀，能透過適當的教學介入形成更高階的直覺（即二階直觀）。培養學生的數學感使其原始直觀能躍升至二階直觀，一直是我們努力的目標，而 S0130「慢慢地試著，**把對它的修正也變為一種直覺反應**」，即說出了我們對學生和自己的期望。

（四）原生直觀對高三生再次學習機率概念的影響

從前測到第二階段教學後的評量測驗，學生的直觀迷思比例顯然降低了許多；她們在經驗了 IRT 之後，也知道不要憑直覺草率作答，需要進一步判斷和驗證自己的直覺；在經過與同學討論、比較別人和自己的想法之後，許多學生肯定猜測、判斷和討論過程的價值。但是，經過這些努力，我們仍不時發現：直觀仍然時時地影響著學生機率概念的「再」學習。例如，在螺旋後期的小組教學中，許多個案學生表示 IRT 並不一定正確，但是，當 MT 在分享討論問卷第 4 題時，有學生仍然認為：樹狀圖中分支較多的機率就會比較大，她不是以題目外型判斷，可是 More A-More B 卻「**常常像鬼魅一樣就跑出來**」（小組晤談討論，4，S0137）。讓我們一起體會，當時 S0137 與 MT 的兩個對話片段：

S0137：剛剛和 S0113 討論過了，樹狀圖不準啦！

MT：樹狀圖不準？

S0137：不能只看樹狀圖哪一支比較多。

S0113：她忘了考慮 0.2 和 0.8。

MT：所以，不是樹狀圖哪一支（A 或 B）比較多機率就比較大？

S0137：對呀，**真是討厭**！

MT：不錯，很好。這一題應該都沒問題了。記得已經發生了的事件，再談發生的可能性就不太有意義了，所以，前面的事件是不是已經發生了，要分清楚。還有，畫樹狀圖要注意量的大小，如果只注意哪一種情況比較多，那不是又像是 More A– More B 了嗎？

S0137：對呀，**直觀真討厭**！

晤談中的幾位個案學生也說「現在比較清楚地知道排序、知道 IRT，但是在很急的時候，可能最原始的直觀又會出現。」其實，當專家缺少時間做反省性思考之時，也會出現直覺的、常識的或是素樸的思考方式（Chi, 1992）。

S0105 就曾在評量測驗中的反應說明了，她仍在原始直觀與科學概念的不一致中掙扎著；另外，有不少學生肯定全班及小組討論的價值，卻承認仍然無法完全改變，例如：

S0128 **有再次檢查自己思考的作用**，也比較能認識到自己有哪些地方的觀念是比較不清楚的，**但時間一長，還是有可能忘掉**。

> S0119 會努力動腦思考，印象較深刻，比較不容易忘記；不過，**有時候錯的東西會一直跟著我**。

這表示，學生機率直觀概念的改變過程是相當不穩定的，而且很可能隨情境而不同。她們會在直觀迷思與科學概念之間擺盪：在某一個情境之下理解科學概念，卻在另一個情境之下又會回復到原生直觀，這就是直觀的頑固性。學校數學教學提供學生概念性和程序性的知識，卻對學生原生直觀的影響相當有限，而且經常是直觀與概念在生活中並存；而直觀的強制性使學生的原生直觀不但不容易被改變，更進而影響到她們數學概念的學習。這些直觀本質若發展成為不適當的內在表徵，個體即會不情願接受已被證明的有效表徵，難怪，它讓學生感覺到「**有時候錯的東西會一直跟著我**」。

既然直觀的迷思是如此難以改變，我們更應該提醒學生：不要急著反應，要多想想再判斷（即培養後設監控認知）。S0108 在概念反應問卷中，曾描述印象最深刻的剎那是：

> 現在寫題目時，常會告訴自己：A 對 B 不一定對，∴一定要檢查，而且，能避免自己一直重複錯誤的直覺。這點很重要。∵通常在什麼都忘記時，直覺就跑出來了，但現在某些直觀法則的提醒已壓過直覺，反而會讓我去想：直覺真的對嗎？

她的表白非常令我們感動，雖然，兩階段三循環的直觀教學無法讓每位學生完全避免 IRT 的影響，可貴的是：T-TECOP 的努力仍有部分學生感受到。

陸、討論和省思

一、直觀教學的成效

歷經兩階段的直觀教學，許多學生已能清楚地表達自己所寫機率式的意義，有些甚至能比較不同機率問題間的差異；對於潛藏 IRT 的機率問題，大部分學生均可看到其外在特徵；而且，大部分學生都能察覺和釐清自己的原生直觀迷思。但是，仍然有學生能察覺卻又無法克服它，例如 S0119「**有時候錯的東西會一直跟著我**」、S0132「**就忍不住覺得…**」或 S0137「**死性難改吧！**」的表白。對這些學生而言，直觀的特徵總是影響著她們的機率概念學習。另外有些學生，不但能察覺而且能修正直觀迷思，將原生直觀轉為二階直觀，例如在抽籤問題中，S0109 由受時間軸影響認為無法比較第一次和第二次取出白球的機率大小，轉變成為「**正確答案是非常直觀的**」（王安蘭, 2005）；有些個案學生甚至提出修正直觀的看法，例如 S0130。這些學生的學習經驗，相當程度地呼應了「直觀是可以學習的，是可以經由教學改變」的猜測（Fischbein, 1987；Resnick, 1999）。

本研究直觀教與學的動態遞迴過程，可以如圖 3 所示。機率概念的再學習過程是認知與後設認知的交互作用，所以，教學的 Delta1 與 Delta2 皆是一互補-動態的互動關係。學生的自發性概念（原生直觀）在教學 Delta1 中，面臨挑戰（認知衝突）、新舊概念連結（類比）與他人溝通想法（小組合作、言談）；在教學的 Delta2 中，學生察覺數學概念的內涵並做判斷與連結，同時思考如何自我調整以產生科學性概念（二階直觀）；在

遇到不熟悉情境、題目較複雜或需要高階知識時，受制於直觀特性無法使用現有的科學知識而再次使用原生直觀，雖是折返但是已經能夠察覺原生直觀的不適用；於再次接受教學 Delta1、Delta2 協助時，產生科學性概念（二階直觀）。學生在修正原生直觀之後又折返或在不熟悉的情境下又再度使用原生直觀的現象，就如同”概念回歸”（楊文金，1993），它說明了概念的改變是個相當不穩定的過程，而且經常會依情境而定，學生會在另有概念與科學概念之間搖擺（Tao & Gunstone, 1999）。雖然，概念改變需經過數千小時的學習，才能夠讓新習得的概念更具豐富性、連貫性和潛在強度以控制先前概念，然而，在使用新概念的當下，舊有的概念卻依然是潛藏於某處（Chi, 1992）。這表示，原始直觀不可能消失，即使經過相當程度的教學之後被覆蓋，它們仍會一直潛在地影響學生的判斷（Fischbein, 1987）。

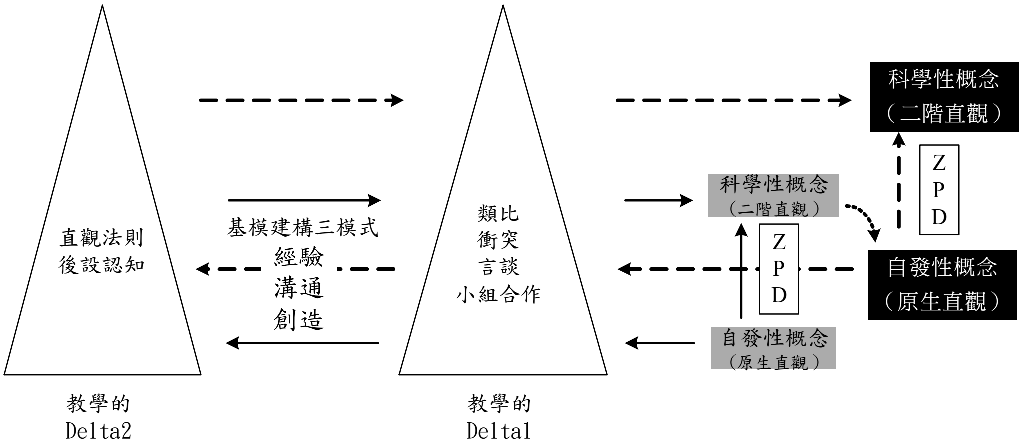

圖 3　機率直觀教學的 Delta1 和 Delta2 遞迴運作圖

資料來源：作者自製

依據將機率概念類型的四階段說（Shaughnessy, 1992），處在自然統計階段的學生，在教學的作用下，能夠注意樣本空間的數學模型、具備應用正規機率模型的能力，但是，當他們面對不是常見類型的隨機問題時，又會倒退回到常用的因果推理方法和直觀的解釋。這與上述的直觀折返現象一致，當學生遇到情境不熟悉、題目愈複雜或需要高階知識的情況，即受直觀立即、肯定和頑固性的影響，無法使用現有的科學知識即選用原生直觀。我們認為：處在自然統計階段的學生遇到問題時，會折回天真統計或非統計階段的過程，類似於 Pirie 及 Kieren（1994）所提出理解數學的動態折回論。她們指出，當學生在外層理解階段遇到問題常會折回內層，再組織早先所建構的認知以解決問題；它表徵了一個成長的、動態的、階段性的、非線性的和遞迴的過程。因此，我們將四階段說仿此理論畫成如圖 4 的洋蔥切面圖，來說明學生機率概念再學習時的直觀折返現象。

例如 S0137 知道 IRT 不一定正確，當遇到不熟悉的問題就選擇畫樹狀圖，她能使用正規模式回答，應是處於自然統計階段；但是，忽略了各種情況的機率大小未必相同，只看到樹狀圖中的那一分支比較多就認為機

率會比較大，又呈現了 IRT，這情況應是折回天真統計的階段；經過焦點小組的討論，知道「就算畫出乙贏的樹枝比甲贏的樹枝多，但是，相乘出來不一定乙贏的機率比較大，要小心啊！」，她再次清楚了問題所在又回到自然統計階段。而這樣的直觀折返現象，或許是由於情緒上的緊張或是科學性知識的不足，往往在不知不覺的情況下又再度顯現，讓人覺得它「常常像鬼魅一樣就跑出來」。所以，學生必須學著與直觀共存，學著分析和形式化自己的原始直觀，而教師應協助學生發展其二階直觀，創造機會讓學生使用數學模型去取代原始或原生直觀（Fischbein, 1987）。

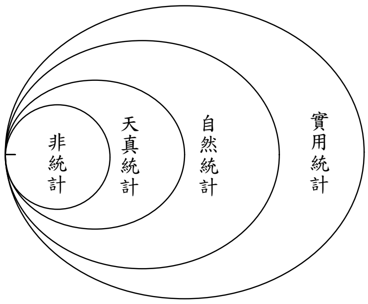

圖 4　Shaughness 機率概念四階段說修正圖

資料來源：作者自製

我們嘗試從直觀的角度，重新看待高三學生的機率思考，設計了直觀教學的鷹架，歷經行動研究和教學實驗的檢討與修正，看到大部分學生在全班教學後，由原來直觀的迷思轉為在原生直觀與科學概念間擺盪的狀態；經全班討論後，不再憑原生直觀輕率地作答，處於直觀與計算驗證中的平衡狀態；在小組教學後，對自己機率思考更有信心。在這樣的過程中，我們體驗到，直觀特徵對高中生再次學習機率概念的影響以及機率概念的直觀折返現象；也更加體會到，機率概念直觀教學的困難；但是從學生的回饋中，卻又獲得許多的支持與感動。

二、IRT 的解讀

另有概念（alternative conception）的研究主張，學生在追求知識的過程中是扮演著一種主動的建構者，會將另有的、在心中凝聚的、堅固的、持久的概念帶到學習的情境中，而學生無法正確回答問題很可能是肇因於此（Noss, 1987）。但是也有研究指出，學生對於許多相同數學和科學概念的回答無法完全以此構念解釋（Stavy & Tirosh, 2000）。所以，一直沒有一套理論可以清楚地說明「另有與迷思概念」的來源，能夠清楚地解釋或預測學生的推論方式，讓我們可以預見學生某些原生想法。Stavy 及 Tirosh 認為，IRT 的本質是邏輯的，所使用的基模是建立在題目特有的、外在的特徵而非題目中特別的內容領域（content-domain）；它能夠解釋和預測學生的推論方式、可廣泛地應用在許多不同的學科中，不像另有概念只限定在某一特定範圍。Van Dooren、De Bock、Weyers 及 Verschaffel（2004）的研究卻發現，IRT 並沒有 Stavy 及 Tirosh 所宣稱的預測力。學生的許多錯誤答案並非完全是應用 IRT 的結果，即使是選擇符合 IRT 的答案，也可發現學生的理由並非總是來自 IRT；而就算學生的理由符合 IRT 的解釋，我們是否能夠真的就認定是受 IRT 的影響？是否這只是學生構成“因為所以”的理由呢？因此，他們質疑 IRT 有助於解釋或預測「學生對相同外在特徵的問題，有類似反應」的能力。他們認為，IRT 將數學解題過程看得太過簡單，過去數十年的另有概念研究或許能提供更多的支持。

本研究也發現，學生的錯誤並不全然能用 IRT 來詮釋；即使是選擇符合 IRT 的答案，也並非只受題目外在特徵的引動而是有其他的迷思類型（例如前測的 1（2））；而有相同 IRT 表現的學生，她們的想法也未必都相同。根據 Fischbein （1999a）的研究，

學生的直觀與其過去所形成的基模密不可分，亦即，兩個有相同 IRT 反應的學生，由於他們的認知基模不同導致這種反應的直觀也有可能不同。例如，前測問卷第 4 題中有 Same A-Same B 表現學生的想法未必完全相同；認為「因為兩家男孩、女孩比例相等，所以機率相等」的學生，可能是受題目外在特徵的影響，才利用比例基模來判斷，而以為「生男生女的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，達到男女平衡的狀態的機率必定是 $\frac{1}{2}$ 」的學生，則是受到捷思判斷的影響。對於同一類 IRT 所導致的結果，其隱含的直觀可能來自不同類別的因素，當類別不同時教師協助學生的方式或許也應有所不同。我們雖然認同 Van Dooren 等人（2004）對 IRT 的批評，但是，也發現學生可以不受題目外在特徵的影響而呈現 IRT，只是，當學生科學知識不足時，這樣的直觀迷思就會比較容易出現。因此，我們認為：IRT 仍有數學教學上的積極價值。

對我們的合作研究來說，IRT 的預測模式並非最重要的，比較重要的是：在經驗 IRT 之後，學生不但能夠由題目的外在特徵察覺這類型的問題而減低直觀迷思的影響；更因為，了解 IRT 的思考模式與限制而學會隨時檢測自己的直覺反應，進而養成批判性思考的習慣；甚至，學會從不同觀點看問題以修正原生直觀。這才是 IRT 在本直觀教學中最具教育意義的貢獻。

柒、階段性結論和建議

當我們從直觀的角度重新發展高三學生的機率思考時發現，直觀迷思除了在一般非機率問題都可能會出現的 IRT 之外，還包括與建構樣本空間能力有關的複合事件等機率迷思，和受時間軸及決定論的影響而混淆了因果關係的條件機率。因為，日常生活經驗充滿了與機率概念有關的語言，而經驗又會直接地影響直觀，所以，直觀在學生的機率學習過程中扮演著兩種極端的角色：**它既是學習的助力又是學習的障礙**。因此，數學教師應該協助學生瞭解學習機率概念時可能產生的直觀迷思；提供概念衝突的情境，讓學生察覺這種衝突進而學習去分析這些迷思和衝突的原因；多利用樹狀圖建構完整的樣本空間，釐清獨立和條件機率的概念以中和這些直觀迷思；以及，善用學生正確的原生直觀連結抽象的數學式。

本研究所構思的直觀教學鷹架（圖 1 與圖 3）中，教學的 delta2 引領著 delta1 的方向，學生不斷地反思外在的經驗世界（delta1 的刺激），使學生的 ZPD 在師生與同儕的互動中，不斷發展向前遷移。在研究過程中，我們看到學生不再輕率憑自己的原生直觀作答；而且，學會用多種方法驗證自己的原生直觀，能夠在原生直觀與科學驗證中取得平衡以釐清自己的機率觀念；有些學生更會從不同觀點看問題並修正自己的原生直觀。而學生在 93 年學測的非機率問題中，也體會到了 IRT 的教育意義，不再急著反應而受制於 IRT。這使我們感受到：直觀教學應融合在一般的教學中，而非鎖定在某一特定單元；應該讓學生養成批判與反思的習慣，遇到問題先讓她們直觀地猜一猜，再用科學概念來檢驗；以及，培養她們的數學感。

由於，機率概念直觀教學的相關研究在國內外仍然少見，所以，未來有許多研究的

方向可以嘗試。首先，關於機率概念的直觀教學，由於本研究中所使用的各評量問題相似度較高，因此，熟悉題目可能影響學生的表現而致無法完全確定學生的瞭解程度。因此，如何更有系統地評估學生數學概念的學習成效？仍有待進一步修正和發展。其次，在研究過程中，我們感受到學生對其原生數學直觀想法的堅持，改變數學概念的教學其實是相當困難的，因而體會到：學生剛接觸一個新數學概念時的教學活動是非常重要且關鍵的。由於概念重建的困難，因此，為免學生將來需要經常重建基模，數學教師對教授一個基模的基本概念需要更認真地規劃；事後的補救教學，有時很難改變學生根深蒂固的想法，造成學生在迷思與科學概念之間擺盪，而且，一再地重建基模會使學生失去學習的興趣與動機（Skemp, 1989；引自許國輝譯，1995）。如果在高中生第一次接觸機率課程時，就先了解和介入其原生機率直觀，這樣的機率教學是否會更有成效？又該如何修正相關的教學活動，才能避免或面對學生的機率概念直觀迷思？也是值得探討的問題。

再者，學生的直觀迷思是否會因不同的數學概念而有不同的影響因子？例如，幾何單元對視覺化的依賴程度較其他單元為高，而機率單元與日常生活經驗的相關程度較高。這些因素是否會對數學概念學習產生不同的影響？另外，數學及科學能力與直觀反應是否有關係？是否學科能力高的學生比較不受直觀迷思的影響？學科能力高的學生是否比較容易克服原始直觀迷思而進入二階直觀？在本研究中，有少數學生在直觀教學之後即到達二階直觀，這是否是學生的特殊背景因素使然？其他學校的學生是否也有可能出現這樣的教學成果？這些問題，都有待進一步釐清，也是日後可以探究的研究議題。

這次的研究經驗使我們更深刻地體會到：任何宣稱有效的數學教學法，在未進行教學試驗與實踐之前都將只是理論；若能放入 T-TECOP 的合作教學-研究脈絡之中，也許會有更佳的機會體驗到它的真實面貌。但是，為了不讓學生當教師實施新教學方法的白老鼠，也為了減少教師身兼研究者的角色矛盾，我們認為：應該建立合作 T-TECOP 的形式與機制，與教育專業人士合作，以及讓教師在自己的職場中研究、學習與成長。透過合作 T-TECOP 的運作方式更客觀地檢視研究過程，應該可以促使在職數學教師與師培者的合作研究，更有助於雙方專業的成長。本研究顯示：學生的潛力無窮，教師及師培者若能培養和引動有效的後設認知能力，她們的表現會更令人感動；而勤於反思的教師及師培者，除了能使學生受益，也能使自己獲得專業成長的喜悅。經由這次的合作 T-TECOP 行動研究，除了解決了部分 MT 經常面臨的機率概念教學問題之外，希望，這些經驗也能提供給其他的 MT 和 MTE 作為教學、研究及指導的參考。

參考文獻

王安蘭（2005）。**一個重構高中生機率概念的行動研究**。國立台灣師範大學碩士論文，未出版，台北市。

李心煽、王日爽、李志堯（譯）（1992）。G. Polya 著。**數學與猜想**（Mathematics and Plausible Reasoning）。台北市：九章。

李維（譯）（2000）。L. S. Vygotsky 著。**思維與語言**（Thought and Language）。台北市：昭明。

吳芝儀、李奉儒（譯）（1995）。M. Q. Patton 著。**質的評鑑與研究**（Qualitative Evaluation and Research Methods）。台北市：桂冠。

吳芝儀、廖梅花（譯）（2003）。A. Strauss 及 J. Corbin 著。**質性研究入門：紮根理論研究分法**（Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory）。台北市：濤石。

吳幸宜（譯）（1994）。M. E. Gredler 著。**學習理論與教學應用**（Learning and Instruction: Theory into Practice） （2nd ed.）。台北市：心理。

邵瑞珍（譯）（1995）。J. S. Bruner 著。**教育的歷程**（The Process of Education: A Landmark in Educational Theory）。台北市：五南。

高熏芳、林盈助、王向葵（譯）（2001）。J.A. Maxwell 著。**質化研究設計：一種互動取向的方法**（Qualitative Research Design: An Interactive Approach）。台北市：心理。

許國輝（譯）（1995）。R. R. Skemp 著。**小學數學教育－智性學習**（Mathematics in the Primary School）。香港：公開進修學院。

張世昌（2002）。**花蓮縣國小中、高年級學生在數學解題上受直觀法則影響之調查研究**。國立花蓮師範學院國小科學教育研究所碩士論文，未出版，花蓮市。

陳伯璋（1990）。**教育研究方法的新取向—質的研究方法**。台北市：南宏。

陳英娥、林福來（2004）。行動研究促進初任數學教師的教學成長。**科學教育學刊**，**12**（1），83-105。

陳祐凱（2002）。**在資訊科技融入教學過程中，教師所須扮演的鷹架角色**。2005 年 3 月 25 日，取自 http：//140.128.55.25/user197/e_news/0002/inf_1.htm

陳澤民（譯）（1995）。R.R. Skemp 著。**數學學習心理學**（The Psychology of Learning Mathematics）。台北市：九章。

陶可（2004）。**淺論數學直覺思維及培養**。2004 年 6 月 30 日，取自 http：//www.szkp.org.cn/kepuleitai/display.asp?id=40132

黃光雄（主譯）（2003）。R.C. Bogdan 及 S.K. Biklen 著。**質性教育研究理論與方法**（Qualitative Research for Education: An Introduction to Theory and Method）（3rd ed.）。台北市：濤石。

黃政傑（1985）。**教育與進步**。台北市：師大書苑。

黃凱旻、金鈴（2003）。一個輔導中學數學實習教師教學概念轉變的行動研究。**國立台灣師範大學學報：科學教育類**，**48**（**1**），23-46

楊文金（1993）。多重現象與電學概念理解研究。**科學教育學刊**，**1**（**2**），135-160。

劉祥通、黃國勳（2003）。實踐小學因數教學模組之研究。**科學教育學刊**，**11**（**3**），235-256。

Andersson, B., & Karrqvist, C. (1983). How Swedish pupils, aged 12-15 years, understand light and its properties. *European Journal of Science Education, 5,* 387-402.

Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6(2)*, 139-163.

Atweh, B., & Heirdsfield, A. (2003). The use of action research for the professionalisation of beginning women teachers as they learn about inclusive mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development, 5,* 53-65.

Bell, G. H. (1985). Can schools develop knowledge in their practice? *School Organization, 5(2)*, 175-184.

Beyer, B. (1987). *Practical strategies for the teaching of thinking*. Boston: Allyn and Bacon.

Borovcnik, M., & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 73-105). Dordrecht: Kluwer Academic.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability . In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic.

Chi, M. T. H. (1992). Conceptual change within and across ontological categories： Implications for learning and discovery in sciences. In R. Giere (Ed.), *Cognitive Models of Science: Minnesota Studies in the Philosophy of Science* (pp.129-186). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Chinn, C. A., & Brewer, W. F. (1998). An empirical test of a taxonomy of responses to anomalous data in science. *Journal of Research in Science Teaching*, *35(6)*, 623-654.

Dole, S., Nisbet, S., Warren, E., & Cooper, T. (1999). Teacher collaboration in developing rich assessment tasks in mathematics as a professional development activity. *Mathematics Teacher Education and Development*, *1*, 38-49.

Driver, R., & Oldham, V. (1986). A constructivist approach to curriculum development in science. *Studies in Science Education*, *13*, 105-122.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities: Insight and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on teaching Statistics*. Victoria, AU: University of Victoria.

Farmer, J. D., Gerretson, H., & Lassak, M. (2003). What teachers take from professional development: Cases and implications. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6(4)*, 331-360.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Reidel Academic.

Fischbein, E. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22(6)*, 523-549.

Fischbein, E. (1999a). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 11-50.

Fischbein, E. (1999b). Psychology and mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*, 47-58.

Fischbein, E., Barbat, I., & Minzat, I. (1971). Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 264-280.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16(1)*, 3-17.

Fischbein, E., & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 27- 47.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 98-105.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 3-40.

Garnett, P. J, Garnett, P. J., & Hackling, D. (1995). Students' alternative conceptions in chemistry: A review of research and implications for teaching and learning. *Studies in Science Education*, *25*, 69-95.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, *45*, 15-33.

Hashweh, M. (1986). Toward and explanation of conceptual change. *European Journal of Science Education*, *8(3)*, 229-249.

Jaberg, P., Lubinski, C., & Yazujian, T. (2002). One teacher's journey to change her mathematics teaching. *Mathematics Teacher Education and Development*, *4*, 3-14.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430-453.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, *5*, 207-232.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (Eds.) (1988). *The action research planner* (3rd ed.). Geelong: Deakin University Press.

Lachance, A., & Confrey, J. (2003). Interconnection content and community: A qualitative study of secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6(2)*, 107-137.

Lin, P-J (2002). On enhancing teachers' knowledge by constructing cases in classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5(4)*, 317-349.

McNiff, J. (1994). *Action research: Principles and practice*. London: Routledge.

Noss, R. (1987). Children's learning of geometrical concepts through LOGO. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 343-362.

Olson, J., & Barrett, J. (2004). Coaching teachers to implement mathematics reform recommendations. *Mathematics Teacher Education and Development*, *6*, 73-91.

Paris, S. G., & Lindauer, B. K. (1982). The development of cognitive skills during childhood. In B. Wolman (Ed.), *Handbook of Developmental Psychology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pirie, S. E., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, *66(2)*, 211-227.

Resnick, L. B. (1999). The development of mathematical intuition. 載於國立台灣師範大學舉辦之「科學評量與教師專業成長：邁向二十一世紀的科學教育學術研討會」手冊(pp. 63-81)，台北市。

Shapiro, B. L. (1989). What children bring to light: Giving high status to learners' views and actions in science. *Science Education*, *73(6)*, 711-733.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Sierpinska, A. (2001). *Why intuitions are more of a problem in probability than in other domains of mathematics?* Retrieved September 28, 2003, from http: //alcor.concordia.ca/~sierp/proba.htm

Smith, T. (2000). Bridging the research-practice gap: Developing a pedagogical framework that promotes mathematical thinking and understanding. *Mathematics Teacher Education and Development, 2*, 4-16.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules.* New York: Teachers College Press.

Steffe, L. P., & D'Ambrosio, B. S. (1996). Using teaching experiments to enhance understanding of students' mathematics. In D.F. Treagust, R. Duit, & B.J. Fraser (Eds.), *Improving Teaching and Learning of Science and Mathematics* (pp. 65-76). New York: Teachers College Press.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiments methodology: Underlying principles and essential elements. In A.E. Kelly, & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Science and Mathematics* (pp. 267-306). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Steinberg, R. M., Empson, S. B., & Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into children's mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7(3)*, 237-267.

Tao, P-K., & Gunstone, R. (1999). The process on conceptual change in force and motion during computer-supported physics instruction. *Journal of Research in Science Teaching, 36(7)*, 859-882.

Tirosh, D., & Stavy R. (2001). The intuitive rules theory and in-service teacher education. In F.-L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 73-85). Dordrecht: Kluwer Academic.

Torff, B., & Sternberg, R. J. (Eds.) (2001). *Understanding and teaching the intuitive mind: Student and teacher learning*. Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of "More A-More B" and "Same A-Same B". *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 179-207.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice*: *Learning, meaning, and identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

致謝

兩位作者和其他 T-TECOP 成員，為 3 班高中生及 6 位個案同學所付出的時間與腦力，致上深深的謝意。同時，我們也感謝助理胡雪芳小姐協助文稿付梓之前的校正工作。本文內容由兩位執筆者負完全責任，與他（她）人無涉。

作者簡介

金鈐，國立臺灣師範大學數學系，副教授

Chien Chin is an Associate Professor of the Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan. E-mail: cchin@math.ntnu.edu.tw

王安蘭，臺北市第一女子高級中學，教師

An-Lang Wang is a Mathematics Teacher of Taipei First Girls High School, Taipei, Taiwan. E-mail: anlang@fg.tp.edu.tw

收稿日期：94.08.22
修正日期：95.05.11
接受日期：95.08.04

Journal of Taiwan Normal University:
Mathematics & Science Education
2006, 51 (1,2) , 15-54

Teaching Mathematics through Intuition as a Way of Enhancing Students' Probabilistic Conceptions

Chien Chin
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

An-Lang Wang
Taipei First Girls High School

Abstract

In order to develop a new, more intuitive approach to teaching probability in senior high school, this study employed an action research method with teaching experiment. Three classes of grade 12 students taught by the second author were investigated for one year: the focus was on the intuitive-probabilistic misconceptions of students and their influence on the students' further steps of probabilistic thinking. In the first stage, the researchers utilized analogical comparison to study the cognitive conflicts students experienced on their way to acquiring scientific knowledge, followed by introducing Intuitive Rules and activating students' meta-cognitive awareness. In the second stage, several formats for classroom discussion and focus-group investigation were employed separately. Based on the results of this 2-stage/3-cycle study, the authors argue that while some students are able to grasp intuitive-probabilistic misconceptions, they are still unable to fully utilize some primitively probabilistic intuitions. After having modified their original misconceptions, they either returned to the primitive misconceptions or reverted to their primary intuition where they encountered unfamiliar questions. This seems to suggest that the unique features of intuition influence not only students' present learning of probabilistic concepts but also their future learning of the concepts; in other words, these primitive intuitions never completely disappear. Several students were not only able to amend their primitive misconceptions, but also able to transform these into second-level intuitions. The authors suggest that mathematics teachers should try to integrate students' primitive probabilistic intuitions with mathematical logic.

Keywords: action research, intuition, intuitive rules, misconceptions, teaching experiment